Quadriche e loro sezioni piane.

1. Stabilire se le equazioni che seguono rappresentano delle superfici sferiche (o, per semplicità, sfere) e, in caso affermativo, trovare i relativi centri e raggi
   $a)\ x^2+y^2+z^2+2x-4z+1=0;\ b)\ x^2+y^2+z^2+2x-y+z+8=0;\ c)\ x^2+y^2+z^2+2x+2y+2=0.$

2. Stabilire se esiste una sfera che passi per i punti $P=(4,-3,0)$, $Q=(-2,-3,0)$, $R=(-2,0,0)$, $S=(0,0,4)$; in caso affermativo, trovarne il centro, il raggio ed un'equazione.

3. Trovare il piano che è tangente alla sfera di equazione $x^2+y^2+z^2-2x-y+8z=0$ nell'origine delle coordinate.

4. Scrivere un'equazione che rappresenti la sfera che è tangente al piano $x+y+z=3$ nel punto (2,1,0) e passa per il punto (4,5,2).

5. Scrivere un'equazione che rappresenti la sfera che ha il centro nel punto (2,1,−3) ed è tangente al piano $2x+y-z=0$.

6. Scrivere un'equazione della sfera con il centro sul piano $x=0$ che taglia sul piano $2x+y+z-7=0$ la circonferenza di centro (2,2,1) e raggio $\sqrt{3}$; rappresentare questa circonferenza con equazioni cartesiane.

7. Scrivere un'equazione della sfera che ha i punti (1,1,−1) e (1,−2,1) come estremi di un diametro. Trovare il centro ed il raggio della circonferenza che è la sezione di questa sfera con il piano di equazione $x=z$ e rappresentare questa circonferenza con equazioni cartesiane.

8. Quante sono le sfere di raggio uguale a 5 che tagliano sul piano $z=3$ la circonferenza di centro (1,1,3) e raggio uguale a 3? Trovarne delle equazioni cartesiane.

9. Scrivere un'equazione cartesiana e delle equazioni parametriche per il cilindro con le generatrici parallele all'asse delle x che taglia sul piano $x=0$ l'ellisse di equazioni
   $$\begin{cases} x=0 \\ y^2+4z^2-64=0. \end{cases}$$

10. Rappresentare in forma parametrica le rette che congiungono l'origine delle coordinate con i punti della parabola $\mathcal{P}$ di equazioni $\begin{cases} z=1 \\ y=x^2 \end{cases}$; ricavare dalle equazioni parametriche un'equazione cartesiana del cono con vertice nell'origine che contiene la parabola $\mathcal{P}$. Determinare il tipo delle intersezioni del cono con i piani x = costante.

11. Scrivere delle equazioni parametriche ed un'equazione cartesiana del cono con vertice nell'origine che taglia sul piano $y=2$ la circonferenza di centro (0,2,0) e raggio 3.

12. Scrivere delle equazioni parametriche ed un'equazione cartesiana del cono di vertice (0,0,1) che taglia sul piano $z=0$ la circonferenza $\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$. Verificare che la matrice dei coefficienti dell'equazione del cono è singolare.

13. Descrivere la superficie di equazione $x^2+z^2=16$ e scriverne delle equazioni parametriche. Studiare le curve che sono le sue sezioni con i piani paralleli ai piani coordinati.

14. Rappresentare con equazioni cartesiane la circonferenza che giace nel piano $x+y=1$, ha centro (1,0,0) e ha raggio uguale a 1.

15. Studiare le sezioni con piani paralleli ai piani coordinati di ciascuna delle quadriche di equazioni

$$\text{a) } x^2+y^2-z^2=1;\quad \text{b) } x^2-4y^2-z^2=1;\quad \text{c) } xy=z;\quad \text{d) } x^2+4z^2=2y.$$

Dedurne se si tratta di ellissoide, iperboloide a una o due falde, paraboloide ellittico o a sella.

16. Una delle quadriche seguenti è tagliata da piani paralleli ad uno dei piani coordinati lungo delle circonferenze: quale?

$$\text{(i) } 4x^2-y^2=2z\,,\quad \text{(ii) } 4x^2+4y^2-z=0.$$

Spiegare come la quadrica che contiene circonferenze possa essere generata dalla rotazione di una conica (è detta perciò *quadrica rotonda*) e ricavare delle equazioni parametriche di questa superficie. Studiare le intersezioni dell'altra quadrica con i piani del fascio improprio $2x+y=h$ e stabilire, in base ai risultati ottenuti, se si tratta di paraboloide ellittico o di un paraboloide a sella.

17. Per ciascuna delle quadriche seguenti, esaminare le sezioni con piani paralleli ai piani coordinati e dedurne se si tratti di ellissoidi o iperboloidi ad una falda o a due falde, e se fra di esse vi siano quadriche rotonde (generate dalla rotazione di una conica intorno ad un suo asse):
(a) $3x^2-4y^2-4z^2=1$, (b) $(x-1)^2+4y^2+(z+3)^2=1$, (c) $4x^2+4y^2+4z^2+x+10z=0$, (d) $-4x^2+y^2-z^2=1$.

18. Verificare che le rette delle due famiglie rappresentate, al variare dei parametri reali t, s, dalle equazioni

$$\begin{cases} x=zt \\ y=\dfrac{1}{4t} \end{cases};\quad \begin{cases} x=s \\ y=\dfrac{z}{4s} \end{cases}$$

giacciono tutte su una stessa quadrica (che è un paraboloide a sella).
Mostrare che due rette della stessa famiglia sono sghembe e che due rette di famiglie diverse si incontrano in un punto della quadrica. In particolare, dopo aver verificato che il punto $(1,1,4)$ appartiene alla quadrica, determinare le rette di ciascuna famiglia che passano per esso, e scrivere un'equazione del piano delle due rette.

19. *Dalla prova scritta del 21 marzo 2006*. (a) Nello spazio è assegnata la quadrica di equazione

$$64x^2+z^2=4y.$$

Spiegare perché basta studiare le sue sezioni con i piani paralleli agli assi coordinati x, z per dedurre che si tratta di un paraboloide ellittico.
(b) Scrivere le equazioni parametriche della conica C che è l'intersezione del piano $y=1$ con la quadrica di equazione $64x^2+z^2=4y$.
(c) Trovare un'equazione cartesiana e delle equazioni parametriche per il cilindro con generatrici parallele all'asse delle y la cui intersezione con il piano $y=1$ è la conica C studiata nel punto (b).

20. *Dalla prova d'esame dell'11 settembre 2006*.
a. Stabilire per quali valori del parametro k l'equazione $x^2+k(y+3k)^2=9k$ rappresenta delle ellissi non degeneri, e trovare i centri ed i vertici di tali ellissi.
b. Nello spazio, riferito a coordinate x,y,z, è assegnata la quadrica Q d'equazione

$$x^2+3(y+9)^2=27\,.$$

Descriverla brevemente, e, utilizzando i risultati precedenti, studiare l'intersezione di questa quadrica con il piano $z=0$.
c. Trovare delle equazioni parametriche della quadrica Q.