Esercizi di ricapitolazione

1. Nello spazio, riferito a coordinate cartesiane ortogonali, sono date:

la retta r di equazioni parametriche $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 2 - t \\ z = 5t \end{cases}$ orientata al crescere delle ordinate,

la retta s di equazioni cartesiane $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2z = 2 \end{cases}$ orientata nel senso delle z crescenti.

Trovare il coseno dell'angolo tra le due rette.
Stabilire se le due rette sono complanari; in caso positivo, trovare il piano che le contiene, in caso negativo, trovare il piano per r che è parallelo a s.

2. Nello spazio, riferito a coordinate cartesiane ortogonali, è data la retta s di equazioni cartesiane $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2z = 2 \end{cases}$.

Trovare la distanza da s dell'origine delle coordinate.

3.
a) Studiare le sezioni della superficie S di equazione $-x^2 + 4(y-1)^2 + 3z^2 = 0$ con piani paralleli ai piani coordinati, trovandone il tipo e gli eventuali centri, assi, vertici.
b) Verificare che, tra le sezioni esaminate, ve ne sono tre degeneri, giacenti in piani che si intersecano in un punto V, appartenente alla superficie.
c) E' vero o falso che, studiando le intersezioni di S con le rette passanti per V, si conclude che S è un cono di vertice V? *Motivare la risposta.*
d) Per confermare la risposta alla domanda precedente, trovare delle equazioni parametriche e una equazione cartesiana per il cono di vertice V che ha come direttrice la curva sezione di S con il piano $x = 2$ e confrontare l'equazione ottenuta con l'equazione di S.

4. Nello spazio, riferito a coordinate cartesiane $Oxyz$, è assegnato il piano σ di equazione $x + y = 3$. Rappresentare con equazioni cartesiane la circonferenza che giace nel piano σ, ha come centro il punto (3,0,0) e ha il raggio uguale a 3. Trovare un'equazione cartesiana e delle equazioni parametriche del cilindro con generatrici parallele all'asse delle y che passa per la circonferenza.

5. Rappresentare con equazioni cartesiane la retta proiezione ortogonale dell'asse delle y sul piano $x + y + z = 1$.

6. Si consideri l'insieme delle matrici, dipendenti dal parametro reale h, $\mathbf{H}(h) = \begin{pmatrix} h & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & h & 1 \\ 1 & 2h & 1 \end{pmatrix}$.

A. E' vero o falso che l'insieme di tutte le matrici $\mathbf{H}(h)$ (al variare di h) costituisce un sottospazio vettoriale dello spazio delle matrici reali di tipo (4,3)? Motivare la risposta.
B. Vi sono dei valori di h per i quali l'applicazione γ: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, associata alla matrice $\mathbf{H}(h)$ rispetto alle basi canoniche, é iniettiva? Indicare tali valori.
C. Posto $h = 0$, determinare uno spazio $\mathbf{U}$ tale che si abbia $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Im}(\gamma) \oplus \mathbf{U}$.

7. Sia $\mathbf{U}$ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, sia $\mathbf{V}$ il sottospazio definito da $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

Determinare una base per $\mathbf{U + V}$ e $\mathbf{U \cap V}$.

8. Per ciascuna delle seguenti applicazioni lineari, dire se è diagonalizzabile, motivando la risposta:
1. $\mathbf{V}$ è il sottospazio dello spazio delle funzioni reali, derivabili, generato da $\sin t$, $\cos t$; L: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è definita da $L(f(t)) = f'(t)$
2. $P_2[t]$ è lo spazio dei polinomi reali di grado non superiore a 2

$$L : at^2 + bt + c \mapsto (2a + b + c)t^2 + (2b - 3c)t + 4c .$$

9. Stabilire se vi siano delle scelte del parametro *h* per le quali la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & h & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ risulti non invertibile; per quel valore di *h*, indicare delle colonne di **A** linearmente indipendenti ed esprimere le restanti come combinazione lineare di quelle.

10. Da una prova d'esame (11 luglio 2008).
1.A. Determinare per quali valori dei parametri *h*,*k* sia compatibile il sistema lineare, nelle incognite *x*,*y*,*z*

$$\begin{cases} x+y+3z=1 \\ x+y+(1+k)z=1+h(1+k) \\ x+z=h \end{cases}.$$

B. Per quei valori di *h*,*k* per cui il sistema ammette infinite soluzioni, trovare le soluzioni.
C. Indichiamo con π il piano di equazione $x + y + 3z = 1$ e con $r(h,k)$ la retta di equazioni $\begin{cases} x+y+(1+k)z=1+h(1+k) \\ x+z=h \end{cases}$. Utilizzare i risultati ottenuti in A) per rispondere alle domande:

(i) Esistono valori di *h*, *k* per cui il piano π e la retta $r(h,k)$ sono incidenti in un solo punto?
(ii) Esistono valori di *h*, *k* per cui il piano π e la retta $r(h,k)$ sono paralleli in senso stretto (cioè, non hanno punti in comune)?
(iii) Esistono valori di *h*, *k* per cui il piano π contiene la retta $r(h,k)$? In caso affermativo, quali sono i parametri direttori della retta?

11. Quali tra i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ <u>non sono </u>sottospazi vettoriali? Motivare ogni risposta!

$\mathbf{A} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=t^2, y=t^2, z=t^2, t \in \mathbb{R}\}$ $\quad$ $\mathbf{B} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=y=z\}$

$\mathbf{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=0\}$ $\quad$ $\mathbf{D}_k = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-5y+8z=k\}, k \in \mathbb{R}$

$\mathbf{E} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=0\}$ $\quad$ $\mathbf{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z \ge 0\}$

$\mathbf{G} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \ge 0\}$.

12. Trovare un cambiamento di base ortonormale che porti a forma diagonale la matrice

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

13. Siano $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le applicazioni così definite, per $k \in \mathbb{R}$

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+kz \\ z+k-1 \\ (\cos k\pi)x-y \end{pmatrix}.$$

I. Per quali valori di *k* la corrispondente applicazione *F* è un'applicazione lineare tra spazi vettoriali?
II. Fissato *k* in modo che *F* sia un'applicazione lineare, determinare una base e la dimensione di Ker*F*, Im*F*.
III. Scegliere la componente β del vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$ in modo che l'insieme $F^{-1}(\mathbf{v})$ delle sue controimmagini non sia vuoto, e determinare tutti gli elementi di $F^{-1}(\mathbf{v})$.

14. Studiare la conica di equazione $3x^2 - 8xy - 3y^2 + x - 3y = 0$ determinandone il centro, gli assi, gli eventuali asintoti.

15. Siano **A, B** due matrici quadrate dello stesso ordine. Si dice che **A, B** sono *simultaneamente diagonalizzabili* se esiste **C** tale che sia $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC} = \mathbf{D}_1, \mathbf{C}^{-1}\mathbf{BC} = \mathbf{D}_2$, con $\mathbf{D}_1$ e $\mathbf{D}_2$ matrici diagonali.
Dimostrare che se **A, B** sono simultaneamente diagonalizzabili, allora permutano, cioè: **AB = BA**.