

2. Equazioni parametriche di rette e di piani

1. Nel piano, è assegnato un sistema di coordinate cartesiane $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ ¹. Sono dati i punti

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- Trovare le componenti del vettore \mathbf{a} applicato in O che è equivalente (equipollente) al vettore \overrightarrow{AB} .
- Scrivere delle equazioni parametriche della retta per O parallela alla retta AB .
- Trovare delle equazioni parametriche per la retta AB .
- E' vero o falso che A, B, C sono allineati?
- Trovare delle equazioni parametriche e un'equazione cartesiana per la retta che passa per A ed è parallela al vettore \mathbf{i} .

2. Nello spazio è assegnato un sistema di coordinate affini $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Si considerino i punti

$$R = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \text{ Trovare:}$$

- le componenti dei vettori applicati in O equivalenti rispettivamente ai vettori $\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{RT}$.
- delle equazioni parametriche per la retta che passa per O ed ha la direzione di \overrightarrow{RT}
- delle equazioni parametriche per la retta RT
- delle equazioni parametriche per la retta che passa per O ed ha la direzione di \overrightarrow{RS} ,
- delle equazioni parametriche per la retta RS .

3. Rappresentare in forma vettoriale e con equazioni parametriche:

a. la retta che ha come vettore direttore il vettore $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ e passa per l'origine

b. la retta parallela alla precedente che passa per $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

c. la retta determinata dai due punti $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

d. la retta di $L = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

e. la retta di $L = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. Scrivere delle equazioni parametriche per: a) l'asse delle x (prima coordinata); b) la retta parallela all'asse delle z

(terza coordinata) che passa per il punto $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

¹ A volte, per comodità di scrittura, scriveremo anche (O, \vec{i}, \vec{j})

5. Rappresentare in forma vettoriale e con equazioni parametriche la retta che passa per il punto $L = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ed è

parallela alla retta di equazioni parametriche (nel parametro t)
$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 5 + t \end{cases}.$$

6. Rappresentare in forma vettoriale e con equazioni parametriche

a. il piano per l'origine determinato dai vettori $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix};$

b. il piano per il punto $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ parallelo ai vettori $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix};$

c. il piano per i punti $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

7. Verificare (esaminando opportuni vettori) che i punti $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ non sono allineati e scrivere delle equazioni parametriche del piano che li contiene.

8. Verificare (esaminando vettori opportuni) che i punti $L = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono complanari e scrivere delle equazioni parametriche del piano che li contiene.

3. Eliminazione di Gauss.

1. Per ciascuna coppia di equazioni, stabilire se è formata da due equazioni equivalenti:

a) $x + 5 = 0; -15 = 3x;$ b) $3x = 0; x = 1/3;$ c) $x(x - 1) = 0; x - 1 = 0.$

2. I due sistemi lineari $\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x - 5y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - \frac{1}{2}y = 0 \end{cases}$ hanno entrambi la soluzione (0,0). Si può concludere che i due sistemi sono equivalenti? Motivare la risposta.

3. Utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss, studiare e, se possibile, risolvere i sistemi lineari:

a) $\begin{cases} x + 3y - 2z = 2 \\ 2x - y + z = 2 \\ -x + y + 5z = 5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + 3y - 2z = 2 \\ 2x - y + z = 2 \\ -x + y + z = 5 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x + 3y - 2z = 2 \\ 2x - y + z = 2 \\ -2x + 3y + 4z = 5 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 3x - z + w = 0 \\ x + y + 4z + 7w = 0 \\ x - 2y - 9z + w = 0 \end{cases}.$

4. Studiare, al variare del coefficiente k in \mathbb{R} , i sistemi lineari che seguono e, per quei valori di k per cui è possibile, determinarne le soluzioni:

a) $\begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ x - y + z = 2 \\ -x + ky + z = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ x - y + z = 2 \\ -x + ky + z = -2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x - y = k \\ 3x + 2y = 1 \\ 2x - ky = 4 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + y = 2 \\ -x + ky = -2 \end{cases}.$