**Geometria analitica e algebra lineare**
**Appello del 28 gennaio 2010**

Nome e cognome ________________________________ n. matricola__________

Scrivere nome e cognome **<u>in testa ad ogni foglio</u>. Consegnare questo foglio.** La durata della prova è tre ore; è consentito tenere sul banco un solo foglio di appunti personali.

1. Nello spazio, riferito a coordinate cartesiane ortogonali, sono date: la retta *r* di equazioni cartesiane $\begin{cases} x+y=1 \\ x-z=2 \end{cases}$,
la retta *r'* di equazioni parametriche (nel parametro reale *t*) $x = 2 + t,\ y = -t,\ z = t.$
Stabilire se le due rette sono complanari; in caso positivo, scrivere un'equazione del piano che le contiene, altrimenti trovare la distanza tra di esse.

(punti 2 + 2)

2. Sia $S$ la superficie sferica di centro (0,1,1) e raggio uguale ad 1.
   a) Scrivere un'equazione cartesiana di $S$.
   b) Qual è il piano tangente a $S$ nel punto (0,1,2)?
   c) Rappresentare in forma cartesiana la circonferenza $C$ che è l'intersezione di $S$ con il piano di equazione $2x = 1$ e trovare il centro e il raggio di $C$.

(punti 1/2+3/2+4)

3. A) Studiare la conica di equazione $x^2+4y^2-4x-5=0$ determinandone il tipo, il centro, gli assi e delle equazioni parametriche.
B) Quale sottoinsieme dello spazio, riferito a un sistema di coordinate cartesiane ortogonali *Oxyz*, è definito dalla equazione $x^2+4y^2-4x-5=0$ ? Utilizzando i risultati trovati in 3A), scrivere delle equazioni parametriche di questo sottoinsieme.

(punti 4+2)

4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sono assegnati i sottospazi $\mathbf{U} = Span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}, \mathbf{V} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid x+y-z=0\right\}$.

E' possibile affermare che $\mathbb{R}^3 = \mathbf{U}\oplus\mathbf{V}$ **?** E' possibile affermare che $\mathbb{R}^3 = \mathbf{U} + \mathbf{V}$ **?** Motivare le risposte.

(punti 2 + 2)

5. Sia $\mathbf{A} = (a_{ik})$ una matrice quadrata. Ricordiamo che si chiama *traccia* di **A** la somma degli elementi della sua diagonale

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}.$$

Sia **W** il sottoinsieme dello spazio $M_3(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate di ordine 3 che hanno traccia uguale a 0. Stabilire se **W** è un sottospazio vettoriale di $M_3(\mathbb{R})$ e, in caso affermativo, calcolarne la dimensione.

(punti 2 + 2)

6. Siano $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le applicazioni così definite, per $k \in \mathbb{R}$

$$F\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y+kz\\ x+y+(k-1)z^2\\ 2kx+2y+3z\end{pmatrix}.$$

i) Per quali valori di *k* la corrispondente applicazione *F* è un'applicazione lineare tra spazi vettoriali?
ii) Fissato *k* in modo che *F* sia un'applicazione lineare,
   a) stabilire se *F* è iniettiva
   b) determinare una base e la dimensione di Im *F*
   c) scegliere la componente *v* del vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}1\\v\\0\end{pmatrix}$ in modo che l'insieme $F^{-1}(\mathbf{v})$ delle sue controimmagini non sia vuoto, e determinare tutti gli elementi di $F^{-1}(\mathbf{v})$.

(punti 1+5)