4. Spazi vettoriali, sottospazi. Matrici.

1. Indichiamo con $P_3[x]$ l'insieme costituito da tutti i polinomi, a coefficienti reali, in una variabile x, di grado non superiore a 3. Dimostrare dettagliatamente che $P_3[x]$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

2. Dimostrare, utilizzando soltanto la definizione di spazio vettoriale, che, in ogni spazio vettoriale **V** su $\mathbb{R}$, per qualunque vettore **v** si ha:
$$0\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}.$$

Suggerimento: ricordare le proprietà della somma di vettori e del prodotto di vettori per scalari, in particolare che, per ogni scelta di vettori **u, v** *e scalari a, b, si ha* $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$, $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$.

3. Sia $\mathcal{M}$ il sottoinsieme di $M_{2,3}(\mathbb{R})$ formato da tutte le matrici
$$\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ b & b & b \end{pmatrix}, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}.$$
Dimostrare che $\mathcal{M}$ è uno spazio vettoriale, sottospazio di $M_{2,3}(\mathbb{R})$.

4. Una matrice $\mathbf{A} = (a_{ik})$ è detta "simmetrica" se
$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}, \quad \text{cioè se per ogni } i,k \quad a_{ik} = a_{ki}.$$
Stabilire se l'insieme di tutte le matrici simmetriche di ordine fissato, n, sia uno spazio vettoriale.

5. Vero o falso? **A,B,C** sono matrici (tali che le operazioni indicate siano possibili)
   a) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\,\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$
   b) Se $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, allora $\mathbf{AC} = \mathbf{BC}$
   c) Se $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, allora $\mathbf{AC} = \mathbf{CB}$
   d) Se $\mathbf{AC} = \mathbf{BC}$ allora $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

6. Siano **A, B, C** matrici quadrate dello stesso ordine n. E' vero o falso che:
   a) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$
   b) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{CB}$? Motivare le risposte!

7. Date le matrici
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
risolvere l'equazione $5\,\mathbf{BA} + \mathbf{X} = 2\,\mathbf{I}_3$.

8. Ricordiamo che, date due funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si chiama "funzione somma" la funzione definita ponendo
$$f + g : x \to f(x) + g(x), \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$
e "funzione prodotto per il numero $c \in \mathbb{R}$" la funzione definita da
$$cf : x \to cf(x).$$
a. Verificare che l'insieme delle funzioni (da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$), con queste operazioni, è uno spazio vettoriale $\mathcal{F}$ su $\mathbb{R}$,
b. Considerare le funzioni
$$f_1 : x \to x^2, \; f_2 : x \to 4x - 1, \; f_3 = f_1 \circ f_2, \; f_4 = f_2 \circ f_1, \; f_5 = f_1 \circ f_1.$$
Descrivere il sottospazio vettoriale da esse generato.

9. Stabilire se il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$
$$\mathbf{U} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$$
sia un sottospazio vettoriale, motivando la risposta.

10. Stabilire se per qualche valore di α il sottoinsieme
$$\mathbf{V}_\alpha = \{(x_1, ..., x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = \alpha\}$$
sia un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$, e, nei casi in cui è uno spazio vettoriale, trovarne dei generatori.