5. Dipendenza lineare, basi e dimensione.

1. In $\mathbb{R}^2$ sono assegnati i vettori: $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\mathbf{w}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\mathbf{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\mathbf{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Stabilire se le affermazioni che seguono sono vere o false, motivando ogni risposta.
   (a) $\mathbf{v}$ può essere espresso, in modo unico, come combinazione lineare di $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$
   (b) $\mathbf{e}_1$ può essere espresso, in modo unico, come combinazione lineare di **v, w**
   (c) $\mathbf{v}$ può essere espresso come combinazione lineare di **w**, $\mathbf{e}_1$.

2. Stabilire se i vettori $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix},\mathbf{b}=\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix},\mathbf{c}=\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix},\mathbf{d}=\begin{pmatrix}3\\-3\\8\end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti; in caso contrario, estrarre da questa famiglia di vettori un sottoinsieme massimale di vettori linearmente indipendenti ed esprimere i restanti vettori come combinazione lineare di quelli.
3. Per i valori di k per cui è possibile, esprimere uno, tra i vettori $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}2\\2\\5\end{pmatrix},\mathbf{v}(k)=\begin{pmatrix}k\\1\\2\end{pmatrix},\mathbf{w}=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$, come combinazione lineare degli altri.
4. Stabilire se i vettori $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\\2\end{pmatrix},\mathbf{b}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\3\end{pmatrix},\mathbf{c}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\mathbf{d}=\begin{pmatrix}4\\-5\\-1\\0\end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti; in caso contrario, determinar*e* un loro sottoinsieme massimale $\mathcal{B}$ di vettori linearmente indipendenti ed esprimere i restanti vettori come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$.
5. Si considerino le tre famiglie di vettori dello spazio $\mathbb{R}^3$:
$$A=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\},B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\},C=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$
Stabilire se una o più tra queste famiglie di vettori è una base di $\mathbb{R}^3$ ed esprimere il vettore $\mathbf{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ come combinazione lineare dei vettori di quella o quelle basi.

6. Nello spazio vettoriale reale $\mathfrak{F}$, delle funzioni reali definite su $\mathbb{R}$, considerare le tre funzioni
$$e^x, e^{2x}, e^{3x}$$
e stabilire se sono linearmente indipendenti.
7. Trovare una base e la dimensione dello spazio vettoriale T_4 di tutte le matrici reali, di ordine 4, triangolari alte (o superiori)
$$T_4=\{\mathbf{M}=(m_{ik}), i,k=1,...,4, m_{ik}\in\mathbb{R} \mid m_{ik}=0 \text{ per } i>k\}.$$
8. Trovare una base, e la dimensione, dello spazio vettoriale S_4 di tutte le matrici simmetriche reali di ordine 4:
$$S_4=\{\mathbf{A}=(a_{ik}), i,k=1,...,4, a_{ik}\in\mathbb{R} \mid a_{ik}=a_{ki}\}.$$
9. Trovare una base, e la dimensione, dello spazio vettoriale E_4 di tutte le matrici emisimmetriche reali di ordine 4:
$$E_4=\{\mathbf{A}=(a_{ik}), i,k=1,...,4, a_{ik}\in\mathbb{R} \mid a_{ik}=-a_{ki}\}.$$
10. Indichiamo con $P_4[x]$ l'insieme costituito da tutti i polinomi, a coefficienti reali, in una variabile x, di grado non superiore a 4. Dimostrare che il sottoinsieme W di $P_4[x]$ costituito da tutti i polinomi che hanno tra le loro radici il numero reale 3
$$W=\{p(x)\in P_4[x] \mid p(3)=0\}$$
è un sottospazio vettoriale di $P_4[x]$, e trovarne la dimensione ed una base.