6. Intersezione e somma di sottospazi

1) Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sono assegnati i vettori

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Completare l'insieme {**u,v**} con vettori della base canonica in modo da ottenere una base di $\mathbb{R}^3$.

2) Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono assegnati i vettori

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Si verifichi che il sottoinsieme

$$\mathbf{U} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_3 - x_4 = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale e se ne determini una base e la dimensione.

b) Dati i sottospazi

$$\mathbf{V} = \mathrm{Span}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}, \ \mathbf{W} = \mathrm{Span}\{\mathbf{e}_3\},$$

si trovi la dimensione ed una base per ciascuno dei sottospazi

$$\mathbf{U} \cap \mathbf{V}, \mathbf{U} + \mathbf{V}, \mathbf{U} \cap \mathbf{W}, \mathbf{U} + \mathbf{W}, \mathbf{V} \cap \mathbf{W}, \mathbf{V} + \mathbf{W}.$$

c) Per ciascuna delle eguaglianze che seguono, spiegare per quali ragioni sia vera o falsa:

i) $\mathbb{R}^4 = \mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$

ii) $\mathbb{R}^4 = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$

iii) $\mathbb{R}^4 = \mathbf{W} \oplus \mathbf{V}$.

3) Nello spazio $\mathbb{R}^2$ si consideri il sottospazio **S** generato dal vettore $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Trovare due sottospazi <u>diversi</u> **T, T'** che siano supplementari di **S** (cioè tali che sia $\mathbb{R}^2 = \mathbf{S} \oplus \mathbf{T} = \mathbf{S} \oplus \mathbf{T'}$).

4) Nello spazio $\mathbb{R}^3$ si consideri il sottospazio **A** generato dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determinare un sottospazio **B** supplementare di **A** (cioè tale che sia $\mathbb{R}^3 = \mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$).

5) In quali casi, dati due sottospazi **U, U'** di uno stesso spazio vettoriale **V**, l'insieme $\mathbf{U} \cup \mathbf{U'}$ è un sottospazio vettoriale di **V**? Mostrare almeno un esempio.

6) Vero o falso? Se **U, U'** sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$ e *dim*(**U**) = 2, *dim*(**U'**) = 3, allora è $\mathbb{R}^5 = \mathbf{U} \oplus \mathbf{U'}$. <u>Motivare la risposta.</u>

7) Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_2[x]$ dei polinomi, a coefficienti reali, in una variabile x, di grado non superiore a 2, si considerino i sottoinsiemi:

$$N = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(0) = 0\}, \ M = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(0) \neq 0\}.$$

a) Stabilire se sia $\mathbb{R}_2[x] = N \oplus M$.

b) Trovare un sottospazio N' supplementare di N.