

7. Applicazioni lineari

1. Per ciascuna delle applicazioni che seguono, stabilire se è lineare, se è surgettiva, se è iniettiva, e trovare l'immagine del vettore $\mathbf{0}$:

a. $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 \\ x \end{pmatrix}$

b. $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x+3y$

c. $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = 3x+1$

d. $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = kx$, per k fissato in \mathbb{R}

e. $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2$

f. $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ z \end{pmatrix}$

g. $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}$

h. $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

i. $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

2. Per quelle tra le applicazioni dell'esercizio 1 che sono lineari, determinare i sottospazi Nucleo ($\text{Ker } F$) e Immagine ($\text{Im } F$).

3. Stabilire se per qualche valore del parametro h l'applicazione $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+h(h-1) \\ hx^2+y+h \end{pmatrix}$ è lineare e, per quei valori, trovarne il Nucleo, l'Immagine, e la matrice associata rispetto alla base canonica.

4. Verificare che l'applicazione $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ -x+2y \\ 5y \end{pmatrix}$, è lineare, trovarne il Nucleo e

l'Immagine, la matrice associata rispetto alle basi canoniche.

5. Trovare, se possibile, le controimmagini dei vettori $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nell'applicazione lineare $L_G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

associata alla matrice $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

6. Stabilire se le applicazioni lineari associate alle matrici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ siano iniettive, e se siano surgettive.