8. Rango di una matrice, teorema di Rouché-Capelli.

1. Sia F: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ -x+2y+z \\ 3y+z \end{pmatrix}$. Trovare:
   a. la matrice associata ad F rispetto alla base canonica,
   b. una base e la dimensione del sottospazio Ker F,
   c. se esistono, le controimmagini dei vettori $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.
2. Sia H: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $H\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-z \\ -x+z \\ 2x-y+2z \end{pmatrix}$. Trovare:
   a. la matrice associata ad H rispetto alla base canonica,
   b. una base e la dimensione del sottospazio Ker H,
   c. se esistono, le controimmagini dei vettori $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.
3. Utilizzando il teorema di Rouché-Capelli, stabilire se esistono valori del parametro t per cui siano compatibili i sistemi lineari
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} t \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ t \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}.$$
   Nei casi di sistemi compatibili, trovarne tutte le soluzioni.
4. In ognuna delle matrici che seguono, uno o più elementi dipendono dalla scelta di un numero reale α. Stabilire, per ciascuna matrice, se il suo rango possa variare a seconda della scelta di α e, in caso affermativo, spiegare in qual modo il rango dipenda da α.
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & \alpha \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \mathbf{R} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & \alpha+2 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{S} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2\alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & \alpha^2+1 & 3 \\ 1 & 2 & \alpha+4 \end{pmatrix}.$$
5. Determinare per quali valori del coefficiente λ sono compatibili i sistemi lineari
$$(a)\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & \lambda \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (b)\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & \lambda \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ \lambda \end{pmatrix}; \quad (c)\begin{cases} -x+2y=1 \\ 3x+y=\lambda \\ x+y=2 \end{cases}; \quad (d)\begin{cases} x-y-6z=-3 \\ x+2y+4z=1 \\ x-y+2\lambda z=\lambda \\ \lambda x+\lambda y-2z=1 \end{cases}.$$
   e trovare quante e quali siano le soluzioni in ciascun caso di compatibilità.
6. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sono assegnati i due sottospazi
$$\mathbf{U} = Span\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \quad \mathbf{V} = Span\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$
   Determinare i sottospazi **U⊕V, U∩V,** indicandone la dimensione ed una base.
7. Determinare i valori del parametro μ per cui il sistema omogeneo $\begin{cases} 3x-y+z=0 \\ x+y+4z=0 \\ x-2y-z\mu=0 \end{cases}$ ammette autosoluzioni; per quei valori di μ, trovare tutte le autosoluzioni.