Equazioni cartesiane di rette nel piano e nello spazio, di piani.

1. Nel piano sono assegnati i punti $L = (2, 3)$, $M = (-1,1/2)$, $N(-2,2)$.
   a. Controllare che essi non sono allineati,
   b. scrivere un'equazione cartesiana della retta r che passa per L ed M,
   c. scrivere delle equazioni parametriche e cartesiane della retta s che è parallela alla retta r e che passa per il punto N.
2. Trovare un'equazione cartesiana per la retta di equazioni parametriche, nel parametro λ, $\begin{cases} x = -2+3\lambda \\ y = 5+\lambda \end{cases}$.
3. Trovare delle equazioni parametriche per la retta a di equazione $x + 5y - 8 = 0$ e rappresentare sia in forma parametrica che in forma cartesiana la retta che è parallela ad a e passa per il punto (2,0).
4. Nel piano sono assegnate le rette r, di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 3-4t \\ y = -1+2t \end{cases}$, ed r', di equazione cartesiana $x + 6y + 2 = 0$. Stabilire se le due rette sono incidenti e, in caso affermativo, trovare il punto in cui si intersecano.
5. Nel piano sono assegnate le rette r, di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 3-4t \\ y = -1+2t \end{cases}$, ed s, di equazioni parametriche, nel parametro τ cartesiana $\begin{cases} x = 1+\tau \\ y = -1+2\tau \end{cases}$. Stabilire se le due rette sono incidenti e, in caso affermativo, trovare il punto in cui si intersecano.
6. Scrivere un'equazione che rappresenti il fascio delle rette che passano per il punto $V = (-3,1)$; tra le rette di questo fascio determinare:
   a. quella che è parallela alla retta di equazione $x + y = 463$
   b. quella che è parallela all'asse delle y
   c. quella che passa anche per il punto (3,2).
7. Costruire un modello geometrico per risolvere il problema: *decidere quale, tra le seguenti offerte di un gestore di telefonia mobile, sia più conveniente per una persona che usa poco il telefono*:
   a. schede prepagate, al costo delle chiamate di 24, 6 centesimi al minuto
   b. contratto di abbonamento di 12 euro al mese, con costo delle chiamate di 16,2 cent/min.
8. Rappresentare con equazioni parametriche e con una equazione cartesiana
   a. il piano per l'origine determinato dai vettori $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$;
   b. il piano per il punto $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ parallelo ai vettori $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$;
   c. il piano per i punti $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
9. Nello spazio, è assegnato il vettore $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ Trovare delle equazioni parametriche e delle equazioni cartesiane per
   a. la retta parallela al vettore **w** e che passa per l'origine
   b. la retta parallela alla precedente che passa per $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
10. Nello spazio, sono assegnati i punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Scrivere delle equazioni parametriche e cartesiane per le rette determinate da ciascuna delle seguenti coppie di punti: (A, B), (B, C), (C, D).
11. Scrivere delle equazioni parametriche e cartesiane per le seguenti rette dello spazio:
   a. l'asse delle x (prima coordinata);

b. la retta parallela all'asse delle z (terza coordinata) e passante per il punto $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

c. la retta che passa per il punto $E = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ è parallela alla retta di equazioni parametriche (nel parametro t) $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 5 + t \end{cases}$

d. la retta che passa per il punto $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ed è parallela alla retta di equazioni cartesiane $\begin{cases} 4x - 3z = 5 \\ x + y = -3 \end{cases}$

12. Verificare (esaminando opportuni vettori) che i punti $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ non sono allineati e scrivere un'equazione cartesiana del piano che li contiene.

13. Verificare (esaminando vettori opportuni) che i punti $L = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono complanari e scrivere un'equazione cartesiana che rappresenti il piano che li contiene.

14. Scrivere delle equazioni cartesiane che rappresentino i piani determinati da ciascun insieme di condizioni:

a. essere parallelo all'asse delle y e alla retta di equazioni (nel parametro t) $x = 1 + t,\ y = 2t,\ z = 3t$ e passare per il punto $E = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

b. contenere la retta di equazioni parametriche (nel parametro t) $x = 1 + t,\ y = 2t,\ z = 3t$ ed il punto $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

c. contenere l'asse delle x ed il punto $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

d. passare per l'origine delle coordinate ed essere parallelo al piano di equazione $x + 2y + z = \pi$

e. passare per il punto $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ed essere parallelo al piano dei due assi coordinati delle y e delle z

f. passare per i punti $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ed essere parallelo alla retta di equazioni parametriche (nel parametro t) $x = 1 + t,\ y = t,\ z = 3 - t$

g. contenere il punto $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ e la retta di equazioni $\begin{cases} 4x - 3z = 5 \\ x + y = -3 \end{cases}$

h. passare per il punto $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ ed essere parallelo al piano φ di equazione $x + 2y - z + 4 = 0$.