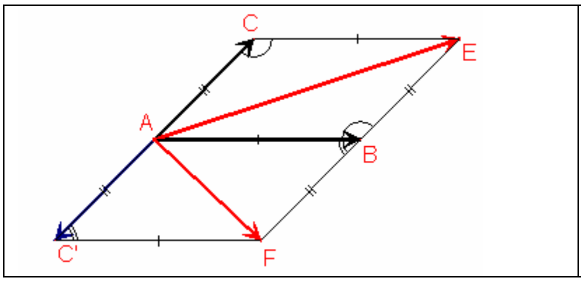
Commenti ad alcuni degli esercizi proposti.
1. Vettori geometrici.

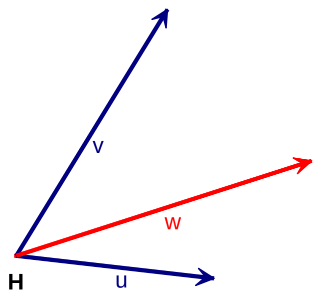
L'esercizio 4.

I punti *C*, *A*, *B* sono vertici consecutivi di un parallelogramma per il quale vale l'uguaglianza $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$: di che tipo di parallelogrammo si tratta? (*Suggerimento*: ricordare le relazioni tra gli angoli di in un parallelogrammo.)

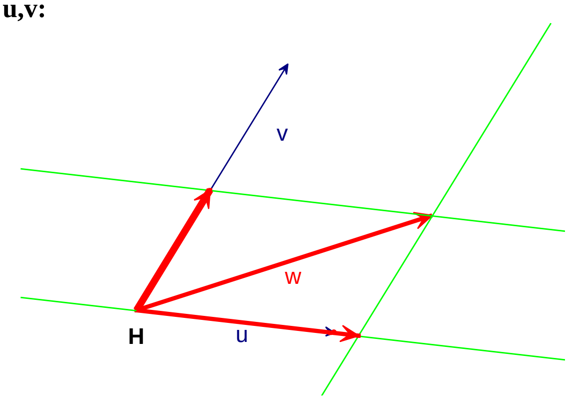


Se vale quella eguaglianza, il triangolo *ABE* ha tutti e tre i lati congruenti con quelli del triangolo *ABF* (e anche del triangolo *AC'F*); allora un angolo del parallelogrammo è uguale al proprio supplementare, e quindi tutti gli angoli del parallelogrammo sono uguali tra loro. Il parallelogrammo è un rettangolo.

Gli esercizi 5,6,7 richiedono di esprimere un certo vettore come combinazione lineare di due vettori dati. In tutti i casi, ci si trova in situazioni analoghe a quella illustrata dal disegno qui sotto:

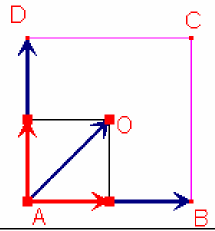


Per esprimere il vettore **w** come combinazione lineare dei vettori **u,v,** occorre costruire un parallelogramma con due lati adagiati sulle rette di **u,v:**



Occorre quindi semplicemente valutare i moduli dei vettori indicati in rosso nella figura qui sopra.
Come esempio, vediamo l'esercizio 5.

ABCD è un quadrato, e *O* è il suo centro (punto d'incontro delle diagonali). Scrivere il vettore $\overrightarrow{AO}$ come combinazione lineare dei vettori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$.



Le rette per *O* parallele ai due vettori dati intersecano i lati del quadrato nei loro punti medi, perciò si ha

$$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\ .$$

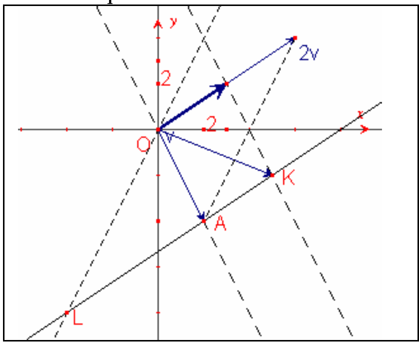
L'esercizio 8.

Nel piano, è assegnato un sistema di coordinate cartesiane $(O,\vec{i},\vec{j})$. Sono dati i vettori $\overrightarrow{OA}=2\mathbf{i}-4\mathbf{j}$, $\overrightarrow{OB}=-\mathbf{i}+3\mathbf{j}$, $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\mathbf{i}$. Trovare le componenti dei vettori $\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$. Stabilire, senza ulteriori calcoli, se i punti A,B,C sono allineati.

Le componenti di $\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ sono: $1+1+\frac{1}{2}$ rispetto a **i,** $-2-3$ rispetto a **j** , quindi la coppia (5/2,–5); quelle di $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ sono (–3,7) e quelle di $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$ sono (–3/2,4). Se i tre punti fossero allineati, il vettore $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ dovrebbe essere un multiplo del vettore $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$, ma non è così.

L'esercizio 9.

Nel piano, fissato un sistema di coordinate cartesiane $(O,\vec{i},\vec{j})$, sono assegnati $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$. Trovare, se esistono, dei punti K, L in modo tale che **v** sia equivalente ad $\overrightarrow{AK}$ (cioè, si ottenga per traslazione da $\overrightarrow{AK}$) e che 2**v** sia equivalente a $\overrightarrow{LA}$.



Dette (a,b) le coordinate di K, deve essere

$$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}a-2\\b+4\end{pmatrix},$$

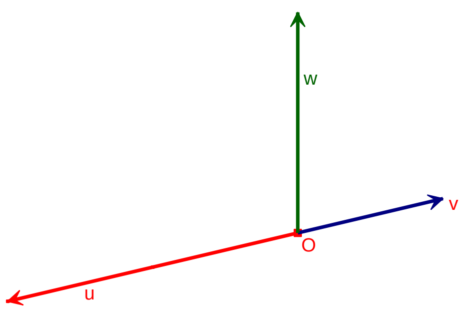
da cui si ricava: $a = 5$, $b = -2$.

Analogamente, le coordinate (x,y) di L devono verificare le equazioni $\begin{cases}2-x=6\\-4-y=4\end{cases}$, quindi L è il punto di coordinate (–4,–8).

L'esercizio 12.

E' vero o falso che se tre vettori giacciono in uno stesso piano allora **ciascuno** di essi si può ottenere come combinazione lineare degli altri due? Spiegare la propria risposta.

La risposta è: non è vero.
E' vero che almeno uno si può scrivere come combinazione lineare degli altri due, ma non ognuno di essi. Consideriamo, infatti, il caso in cui due, tra i tre vettori complanari, siano tra loro dipendenti, come i vettori **u,v,w** della figura (con **u** = –2 **v**):



Il vettore **w** non si può scrivere come combinazione lineare di **u,v**; si può scrivere

u = –2 **v** + 0 **w.**