Commenti ad alcuni degli esercizi proposti
10. Rette sghembe, rette parallele a piani, fasci di piani.

I primi quattro esercizi *richiedono di stabilire se le rette di una data coppia siano sghembe e di determinare un piano che è parallelo ad esse (oppure, in particolare, ne contenga una, o entrambe). Quando le due rette sono date in forma cartesiana, dalla teoria dei sistemi lineari si deduce che esse sono sghembe se la matrice completa del sistema formato dalle loro equazioni ha rango massimo. Se le rette non sono assegnate in forma cartesiana, si può evitare di ricondursi al caso precedente (passando alla forma cartesiana), e invece si può direttamente controllare, come mostreremo nello svolgimento dell'esercizio* 2, *se sia verificata una delle due altre possibilità (se esista un'intersezione o se le rette siano parallele).*

1. Nello spazio, sono assegnate le rette di equazioni cartesiane, rispettivamente $\begin{cases} x+y-3z=2 \\ y+z=1 \end{cases}$, $\begin{cases} 2x+y-z=2 \\ -x+y+z=1 \end{cases}$. Stabilire se esse sono sghembe o complanari; nel primo caso, trovare il piano per l'origine che è parallelo a entrambe, nel secondo caso, trovare il piano che le contiene.

Riduciamo a scalini la matrice completa del sistema formato dalle quattro equazioni

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 5/8 \end{pmatrix}.$$

Il rango è uguale a 4, *quindi il sistema è incompatibile. Le rette sono sghembe. Passando alle forme parametriche*

$$\begin{cases} x = 2+3t-(1-t) = 1+4t \\ y = 1-t \\ z = t \end{cases}, \begin{cases} x = s \\ y = \frac{1}{2}(3-s) \\ z = \frac{1}{2}(-1+3s) \end{cases}$$

si vede che le rette hanno vettori direttori $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, *perciò il piano per l'origine parallelo a entrambe ha un'equazione* $a\,x + b\,y + c\,z = 0$ *con coefficienti che sono soluzioni del sistema*

$$\begin{cases} 4a-b+c=0 \\ 2a-b+3c=0 \end{cases}, \text{ equivalente a} \begin{cases} 2a-2c=0 \\ b-5c=0 \end{cases}.$$

Una soluzione di questo sistema è (1,5,1). *Un'equazione del piano richiesto è*

$$x+5y+z=0.$$

2. Nello spazio, sono assegnate le rette *r*, di equazioni cartesiane $\begin{cases} x+y-3z=2 \\ y+z=1 \end{cases}$, *r'*, di equazioni parametriche, nel parametro *t* $\begin{cases} x=-2t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$. Stabilire se esse sono sghembe o complanari; nel primo caso, trovare il piano per *r* che è parallelo a *r'*, nel secondo caso, trovare il piano che le contiene.

Se le due rette fossero incidenti, dovrebbe esserci un valore di t che è soluzione del sistema $\begin{cases} -2t+t-3(1+t)=2 \\ t+1+t=1 \end{cases}$, *cioé* $\begin{cases} -4t=5 \\ 2t=0 \end{cases}$. *Essendo questo sistema incompatibile, le due rette non hanno intersezione. La retta r' ha parametri direttori* $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; *per la retta r si trovano (si veda lo svolgimento*

dell'esercizio 1*) i parametri* $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *, che non sono proporzionali a quelli di r', quindi le due rette non sono parallele; dunque, le due rette sono sghembe.*
Il piano per r parallelo ad r' può essere individuato come il piano che contiene un punto, scelto a piacere, di r ed ha la giacitura determinata dai vettori direttori delle due rette; per trovare la giacitura, si può procedere come nello svolgimento dell'esercizio 1. *<u>Altrimenti,</u> si può cercare nel fascio dei piani che contengono la retta r*
(*) $\qquad h(x+y-3z-2)+k(y+z-1)=hx+(h+k)y+(-3h+k)z-2h-k=0,\ con\ (h,k)\neq(0,0)$,
quel piano la cui giacitura contiene la direzione di r'. Le giaciture dei piani del fascio sono i piani per l'origine, paralleli ad essi, quindi sono rappresentati dalle equazioni (con k, h non entrambi nulli)

$$hx+(h+k)y+(-3h+k)z=0;$$

affinché $(-2,1,1)$ *appartenga ad uno di questi piani deve essere:*

$$-2h+h+k-3h+k=-4h+2k=0\,.$$

Ponendo $h = 1$, $k = 2$ *nell'equazione* (*) *del fascio si trova il piano*

$$x+3y-z-4=0\,.$$

Gli esercizi 5, 6 *richiedono che, assegnata una retta e rappresentato il fascio di piani che ha per sostegno quella retta, si cerchino nel fascio i piani che soddisfanno determinate condizioni. Per esempio, consideriamo:*

6. Sia F il fascio dei piani che contengono la retta di equazioni parametriche (nel parametro s) $\begin{cases} x=s, \\ y=3s \\ z=1-2s \end{cases}$.

Rappresentare F con una equazione cartesiana e determinare, <u>se possibile</u>:

d. il piano di F che è parallelo all'asse delle z

Si devono trovare valori dei parametri h, k in

$$(F)\quad h(y-3x)+k(z+2x-1)=0$$

in modo che la giacitura (piano parallelo per l'origine)

$$x(-3h+2k)+hy+kz=0$$

contenga il vettore dell'asse z, $(0,0,1)$. *Si trova* $k = 0$, *quindi il piano cercato è*

$$y-3x=0.$$

Per rispondere alla domanda

e. il piano di F che contiene l'asse delle x

si deve stabilire se esistono valori di h, k per cui l'equazione (F) sia soddisfatta da due punti distinti dell'asse delle x, per esempio $(0,0,0)$ *e* $(1,0,0)$; *si ottengono le condizioni*

$$\begin{cases} h(0)+k(-1)=0 \\ h(-3)+k(2-1)=0 \end{cases},\ cioè\ \begin{cases} k=0 \\ -3h+k=0 \end{cases}.$$

*Poiché la soluzione h=k=*0 *non è accettabile, si conclude che non esiste in F un piano contenente l'asse delle x.*
Nel caso della domanda

f. il piano di F che contiene la retta di equazioni cartesiane $x = y = z - 1$

invece, la risposta è: il piano $3(y-3x)+2(z+2x-1)=0$.

Per svolgere gli esercizi 7, 8, 9, *conviene ricordare che:*

- *per individuare una retta occorre scegliere, tra gli infiniti piani che la contengono, due piani distinti*
- *le intersezioni di un piano con piani paralleli tra loro sono rette parallele.*

Le risposte all'esercizio 7.

Verificare che la retta, parallela alla retta a di equazioni $\begin{cases} x=4 \\ y=z \end{cases}$ e passante per $(2,1,3)$, giace nel piano α di equazione $2x + y - z = 2$.

Risposta: la retta $\begin{cases} x=2 \\ y-1=z-3 \end{cases}$ *ha equazioni parametriche* $(2,t,t+2)$; *si ha* $4 + t - t - 2 = 2$ *per ogni t.*

a. Rappresentare con equazioni cartesiane il fascio improprio delle rette che giacciono in α e sono parallele ad a.

Risposta: una scelta possibile è $\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x = k \end{cases}$, *per* $k \in \mathbb{R}$.

b. Rappresentare con equazioni cartesiane il fascio proprio delle rette che giacciono in α e passano per (2,1,3).

Risposta: una scelta possibile è $\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ h(x-2) + k(y-1) = 0 \end{cases}$, *con* $(h,k) \neq (0,0)$.

La risposta all'esercizio 8.

Esiste qualche retta che sia parallela a entrambi i piani $2x + y - z = 2$, $y = z$? Se esiste, scriverne delle equazioni.

Ne esistono infinite: sono le rette parallele alla retta che è l'intersezione dei due piani. Si possono rappresentare con i sistemi $\begin{cases} 2x + y - z = h \\ y - z = k \end{cases}$, *con h, k che soddisfano almeno una tra le condizioni:*

$$h \neq 2,\ k \neq 0.$$

Sull'esercizio 9.

Verificare che le rette di equazioni, rispettivamente, $x = y = z$, $x + 1 = z = 0$ sono sghembe e che nessuna di esse passa per (2,0,0). Determinare la retta per (2,0,0) che incontra ciascuna di esse. (*Suggerimento:* quella retta è complanare con ciascuna delle due rette sghembe).

Il fascio di piani per la prima retta ha equazione $h(x-y) + k(y-z) = 0$ *; il piano che passa per* (2,0,0) *è determinato dalla condizione* $h(2-0) + k(0) = 2h = 0$, *quindi è il piano* $y - z = 0$.
Nel fascio dei piani per la seconda retta, di equazione $\lambda(x+1) + \mu z = 0$, *il piano che passa per* (2,0,0) *è determinato da* $\lambda(2+1) + \mu 0 = 3\lambda = 0$, *quindi è il piano di equazione* $z = 0$.
Si conclude che la retta, per (2,0,0) *incidente con ciascuna delle due rette date, è*

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ z = 0 \end{cases},\ \text{cioè l'asse delle } x \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$