Commenti ad alcuni degli esercizi proposti
11. Matrici invertibili, cambiamenti di base.

Per affrontare gli esercizi 1, 4, 5 *occorre sapere che una matrice* **A** *è invertibile se e solo se ha rango massimo; la seconda parte dell'esercizio* 5 *si affronta come già visto per gli esercizi del n. 5, sulla dipendenza lineare. Per svolgere gli esercizi* 1, 4 *occorre risolvere simultaneamente i sistemi lineari* **AX = I.** *A titolo di esempio, consideriamo*

L'esercizio 4.

Trovare per quali valori del parametro k la matrice $\begin{pmatrix} k & 1-k \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ sia invertibile e, per quei valori di k, calcolare la matrice inversa.

Utilizziamo il metodo di Gauss per trovare il rango della matrice:

$$\begin{pmatrix} k & 1-k \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ k & 1-k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2-2k+3k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2+k \end{pmatrix}.$$

Il rango della matrice è 1 *se è* $k = -2$; *per* $k \neq -2$, *la matrice è invertibile. Per trovare l'inversa usiamo il procedimento di eliminazione verso il basso e verso l'altro*

$$\left(\begin{array}{cc|cc} k & 1-k & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} k & 1-k & 1 & 0 \\ 0 & 2+k & 2 & -k \end{array}\right) \xrightarrow{k \neq -2} \left(\begin{array}{cc|cc} k & 1-k & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{2+k} & \frac{-k}{k+2} \end{array}\right) \uparrow \left(\begin{array}{cc|cc} k & 0 & 1-\frac{2-2k}{2+k} & \frac{k(1-k)}{k+2} \\ 0 & 1 & \frac{2}{2+k} & \frac{-k}{k+2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{2+k} & \frac{1-k}{2+k} \\ 0 & 1 & \frac{2}{2+k} & \frac{-k}{k+2} \end{array}\right)$$

Per $k \neq -2$, *la matrice inversa di* $\begin{pmatrix} k & 1-k \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ *è*

$$\frac{1}{k+2}\begin{pmatrix} 3 & 1-k \\ 2 & -k \end{pmatrix}.$$

L'esercizio 2.

Si supponga che, per una data matrice quadrata **A,** esista una matrice **B** per cui sia **AB = I** ed esista una matrice **C** per la quale sia **CA = I** . Dimostrare che **A** è invertibile.

Dall'ipotesi

AB = I

moltiplicando a sinistra per **C** *si ricava*

C(**AB**) = **CI,**

quindi, per le proprietà della matrice **I** *e per la proprietà associativa*

(*) (**CA**)**B = C.**

Per l'ipotesi

CA = I

dalla (*) *segue*

IB = C, *quindi* **B = C.** .

In conclusione, si ha

AB = BA = I,

cioè che **A** *è invertibile, come si doveva dimostrare.*

L'esercizio 3.

Si è visto che, se una matrice quadrata **A** è di rango massimo, è possibile risolvere in modo unico il sistema (nella matrice incognita **X**) **AX = I;** infatti, utilizzando l'algoritmo di Gauss, si costruisce una matrice **B** tale che sia **AB = I**. Come si può provare che è anche **BA = I ?**

Poiché anche la matrice $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ *è di rango massimo, con lo stesso procedimento si costruisce una matrice* $\mathbf{C}^{\mathbf{T}}$ *per la quale sia ha* $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{C}^{\mathbf{T}} = \mathbf{I}$, *e quindi, per le proprietà dell'operazione di trasposizione,* **CA = I.**
L'esercizio precedente mostra che è **C = B**, *e quindi che è* **BA = I = AB** *(l'inversa a destra è anche inversa a sinistra)***.**

L'esercizio 6.

Verificare che le due famiglie di vettori $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ costituiscono due basi per lo spazio $\mathbb{R}^2$; trovare le matrici dei cambiamento di base

a) dalla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ alla base $\mathcal{B}$

b) dalla $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$

e trovare le componenti del vettore $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ ed alla $\mathcal{B}'$.

$\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono coppie di vettori che non sono l'uno multiplo dell'altro, quindi ciascuna è composta da due vettori linearmente indipendenti. Poiché ogni base di $\mathbb{R}^2$ è costituita da due vettori linearmente indipendenti, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono basi.

Per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, *siano* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *le componenti rispetto alla base canonica,* $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ *le componenti rispetto alla base $\mathcal{B}$,* $\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$ *le componenti rispetto alla base $\mathcal{B}'$. Si ha*

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, *e quindi* $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

b) *Per trovare la matrice* $\mathbf{M}$ *per cui si abbia*

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$$

utilizziamo il passaggio intermedio dalla base canonica alla base $\mathcal{B}'$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$$

Utilizzando a) *ricaviamo*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}, \textit{ cioé } \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}.$$

Ne segue

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Infine, da a), *ricaviamo che a* $x = 1$, $y = 1$ *corrisponde* $X = 3/2$, $Y = 2$; *da*

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}, \textit{ ovvero } \begin{cases} X = \dfrac{X' - Y'}{2} \\ Y = -2X' \end{cases}$$

otteniamo che per $Y = 2$, $X = 3/2$ *si ha* $X' = -1$, $Y' = -4$.

L'esercizio 8.

Sia $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + y \\ x - y \end{pmatrix}$. Trovare la matrice associata a F rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Se $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *sono le componenti del vettore* **v** *rispetto alla base canonica, e se le componenti di* $F(\mathbf{v})$, *rispetto alla base canonica, sono* $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, *allora si ha*

$$(\S) \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

con

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Indichiamo con $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ *le componenti di* **v,** *e analogamente con* $\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$ *quelle di* $F(\mathbf{v})$, *rispetto alla base* $\mathcal{B}$.

Si ha

$$(\S\S) \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},\ e\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix},$$

Sostituendo nella (§) *le* (§§) *si trova*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix};$$

calcolando a parte l'inversa della matrice del cambiamento di base, e moltiplicando ambo i membri a sinistra per questa inversa, si ottiene

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \mathbf{A}'\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

con .

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dalla matrice **A'** *si ricava subito che il primo vettore della base* $\mathcal{B}$ *genera* Ker*F* *ed il secondo genera* Im*F*.

La risposta all'esercizio 9.

Sia F: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ -x+2y \\ y \end{pmatrix}$. Trovare la matrice associata ad F rispetto alle basi $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ per $\mathbb{R}^2$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ per $\mathbb{R}^3$.

La matrice richiesta è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$