Commenti ad alcuni degli esercizi proposti
12. Determinanti. Uso dei determinanti in geometria analitica.

L'esercizio 2.

Usare le proprietà dei determinanti per dimostrare che è

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & .... & 10 \\ 11 & 12 & 13 & .... & 20 \\ 21 & 22 & 23 & .... & 30 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 91 & 92 & 93 & ... & 100 \end{pmatrix} = 0.$$

Si può, a scelta, osservare che le righe differiscono tra loro per multipli di 10, *oppure considerare le colonne, a cominciare dalle prime due*

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & .... & 10 \\ 11 & 12 & 13 & .... & 20 \\ 21 & 22 & 23 & .... & 30 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 91 & 92 & 93 & ... & 100 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1+1 & 3 & .... & 10 \\ 11 & 11+1 & 13 & .... & 20 \\ 21 & 21+1 & 23 & .... & 30 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 91 & 91+1 & 93 & ... & 100 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & .... & 10 \\ 11 & 11 & 13 & .... & 20 \\ 21 & 21 & 23 & .... & 30 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 91 & 91 & 93 & ... & 100 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & .... & 10 \\ 11 & 1 & 13 & .... & 20 \\ 21 & 1 & 23 & .... & 30 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 91 & 1 & 93 & ... & 100 \end{pmatrix}.$$

Le prime due colonne della prima matrice sono uguali, quindi il primo addendo è 0; *il secondo si può riscrivere come somma di due determinanti, lavorando sulla terza colonna*

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+2 & ... \\ 11 & 1 & 11+2 & ... \\ 21 & 1 & 21+2 & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & ... \\ 11 & 1 & 11 & ... \\ 21 & 1 & 21 & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & ... \\ 11 & 1 & 2 & ... \\ 21 & 1 & 2 & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{pmatrix} = 0+0.$$

Infatti, nella prima matrice sono uguali la prima e la terza colonna, nella seconda matrice la terza colonna è il doppio della seconda colonna.

L'esercizio 3

E' vero o falso che det(**A** + **B**) = det(**A**) + det(**B**) ? Motivare la risposta!

Falso. Controesempio: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = -\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

L'esercizio 5.

Utilizzare l'esercizio precedente per trovare dei parametri direttori della retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 2x+y-z=2 \\ -x+y+z=1 \end{cases}.$$

La direzione della retta è lo spazio vettoriale intersezione delle giaciture dei due piani di cui la retta è l'intersezione, quindi è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ -x+y+z=0 \end{cases}.$

Per le considerazioni contenute nell'esercizio 4, *una soluzione particolare di questo sistema omogeneo è data dai determinanti (presi con segni alternati) delle sottomatrici che si ottengono sopprimendo una colonna dalla matrice del sistema; dunque i vettori paralleli alla retta appartengono allo spazio generato da*

$$\begin{pmatrix} l \\ m \\ m \end{pmatrix}, \ con \ \ l = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2, \ m = -\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -1, \ \ n = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

La retta ha parametri direttori (2,–1,3).

La risposta all'esercizio 8 (considerando anche l'esercizio 11).

Nel piano, riferito a coordinate cartesiane $(O,\vec{i},\vec{j})$, sono assegnati i punti $A=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$. Scrivere sotto forma di determinante l'equazione cartesiana della retta che li congiunge.

Scrivendo i vettori come colonne, si ottiene l'equazione della retta nella forma

$$\det\begin{pmatrix}x+1 & -2+1\\ y-4 & -1-4\end{pmatrix}=-5(x+1)+(x-4)=0 \quad \textit{oppure} \quad \det\begin{pmatrix}x & -2 & -1\\ y & -1 & 4\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=0.$$

La risposta all'esercizio 10

Usare dei determinanti per scrivere un'equazione del piano che passa per (1,0,3) ed è parallelo alle rette di equazioni parametriche, rispettivamente nei parametri reali *t* ,*s*, $\begin{cases}x=t\\ y=3t\\ z=-t\end{cases}, \begin{cases}x=1,\\ y=s\\ z=2-s\end{cases}$.

$$\det\begin{pmatrix}x-1 & 1 & 0\\ y & 3 & 1\\ z-3 & -1 & -1\end{pmatrix}=(x-1)(-3+1)-y(-1)+(z-3)=0.$$

L'esercizio 14

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sono assegnati i vettori

$$\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}, \mathbf{u}_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}.$$

Indichiamo con **U** il sottospazio generato da $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e con **V** il sottospazio generato da $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Usare dei determinanti per trovare il sottospazio intersezione $\mathbf{U}\cap\mathbf{V}$.

Perché un vettore di Span$\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}$ *appartenga anche a* Span$\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$, *devono esistere dei coefficienti* λ, μ *per i quali* $\lambda\,\mathbf{u}_1+\mu\,\mathbf{u}_2$ *sia linearmente dipendente da* $\mathbf{v}_1$ *e* $\mathbf{v}_2$. *Deve quindi essere*

$$\det\begin{pmatrix}\lambda+2\mu & 0 & 1\\ 3\lambda-\mu & 2 & 0\\ -2\lambda & 1 & -3\end{pmatrix}=0, \quad \textit{cioé} \quad -6(\lambda+2\mu)+3\lambda-\mu+4\lambda=\lambda-13\mu=0.$$

In conclusione:

$$\mathbf{U}\cap\mathbf{V}=\text{Span}\left\{\begin{pmatrix}15\\38\\-26\end{pmatrix}\right\}.$$