Commenti ad alcuni degli esercizi proposti
13. Uso del prodotto scalare: condizioni di perpendicolarità, angoli, distanze.

Risposte agli esercizi iniziali.

Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^2$, dotato del prodotto scalare standard, è assegnato il vettore $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$.

1. Determinare le componenti di tutti i vettori perpendicolari a **v.**

   Risposta: $<\mathbf{u},\mathbf{v}>=0 \Leftrightarrow \mathbf{u}=\begin{pmatrix}5t\\3t\end{pmatrix}, t\in\mathbb{R}.$

2. Verificare che Span{**v**} contiene due versori**, e** determinare le componenti dei due versori.

   Risposta: $\|t\mathbf{v}\|=1 \Leftrightarrow t^2\|\mathbf{v}\|^2=1 \Leftrightarrow t=\pm 1\big/\sqrt{9+25}$; *i versori sono* $\frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ *e* $\frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$.

3. Sia ***a*** un vettore fissato in $\mathbb{R}^2$. Descrivere l'insieme di tutti i vettori ***v*** per cui è <***a***,***v***> = 0.

   Risposta: è l'insieme dei vettori $\overrightarrow{OP}$ *, con P appartenente alla retta per O, perpendicolare ad* ***a.***

L'esercizio 7.

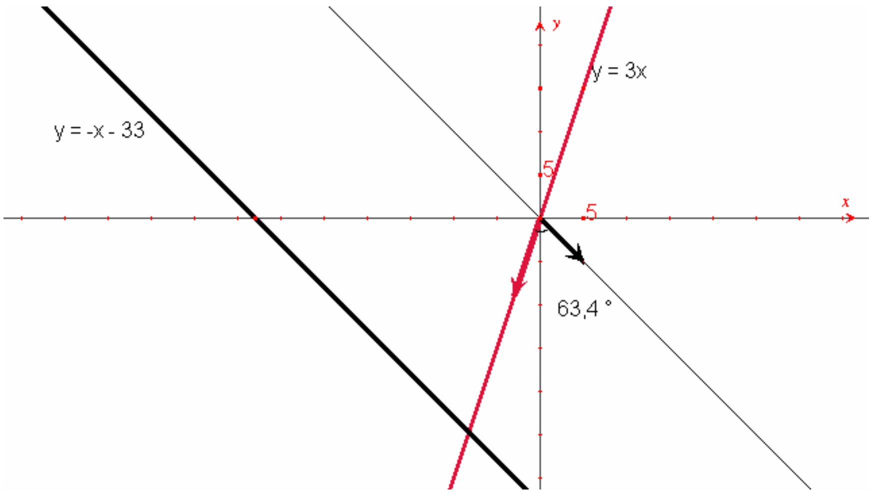
Trovare i versori paralleli alle rette *r*, di equazioni parametriche $\begin{cases}x=3-4t\\y=-1+2t\end{cases}$, ed *r'*, di equazione cartesiana $x + 6y + 2 = 0$, entrambe orientate nel verso delle *y* crescenti; utilizzare tali versori per calcolare il coseno dell'angolo tra le due rette orientate.

I due versori con la direzione di r sono $\pm\frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ *; occorre scegliere il segno + per avere l'orientazione nel verso delle y crescenti. I due versori con la direzione di r' sono* $\pm\frac{1}{\sqrt{37}}\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}$ *; occorre scegliere il segno inferiore per avere l'orientazione nel verso delle y crescenti. Il coseno dell'angolo tra le due rette orientate è dato dal prodotto scalare dei loro versori:*

$$\cos(r,r')=\frac{24+2}{2\sqrt{5}\sqrt{37}}.$$

L'esercizio 8.

Scegliere l'orientamento delle rette di equazioni, rispettivamente, $x + y + 33 = 0$, $3x - y = 0$ in modo che risulti acuto l'angolo tra le due rette così orientate; calcolare i coseni direttori delle rette così orientate ed il coseno dell'angolo tra di esse.



Come nella figura, scegliamo come versore della retta x + y + 33 = 0 il versore $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, *cosicché la retta risulta orientata verso il basso, e, per far in modo che l'angolo tra le due rette orientate sia acuto, orientiamo la retta* $3x-y=0$ *scegliendo il versore* $\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$. *Dunque, i coseni direttori delle due rette sono:*

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \quad e \quad \frac{1}{\sqrt{2}}$$

per la prima,

$$-\frac{1}{\sqrt{10}} \quad e \quad -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

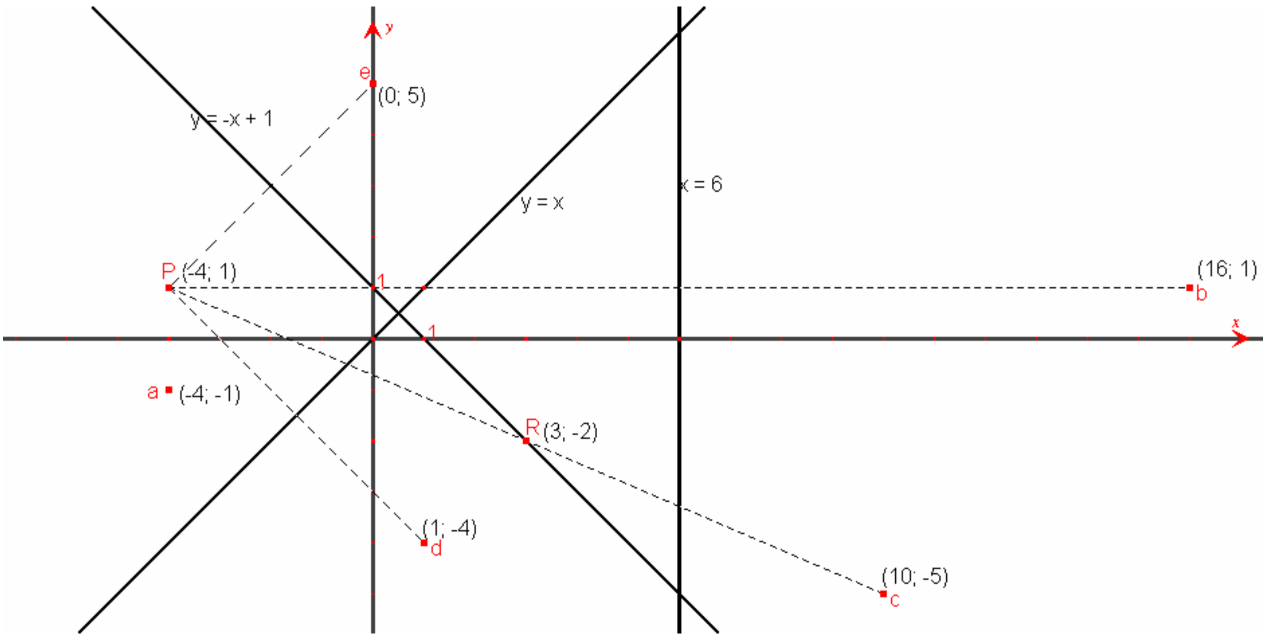
per la seconda. Il coseno dell'angolo tra le due rette orientate è il prodotto scalare tra i due versori scelti:

$$\frac{1-3}{2\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Le risposte all'esercizio 10 sono segnate nella figura successiva.

Fissato il punto $P = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ trovare le coordinate di:

a. il punto simmetrico di P rispetto alla retta di equazione $y = 0$
b. il punto simmetrico di P rispetto alla retta $x = 6$
c. il punto simmetrico di P rispetto al punto $R = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$
d. il punto simmetrico di P rispetto alla retta $y = x$
e. il punto simmetrico di P rispetto alla retta $x + y = 1$.



Svolgiamo la seconda parte (di cui la prima è un caso particolare) dell'esercizio 11.

Verificare che l'insieme dei punti che sono equidistanti dai due punti $P = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ è una retta (asse del segmento PR) che è perpendicolare al segmento PR nel suo punto medio; verificare, per due punti generici A, B, che il luogo dei punti equidistanti da due punti dati A, B è la perpendicolare alla segmento AB nel suo punto medio (asse del segmento).

Indichiamo con $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ *le coordinate di A, e con* $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ *quelle di B. I punti che sono equidistanti da A, B hanno coordinate x, y che verificano l'equazione*

$$(x-x_A)^2 + (y-y_A)^2 = (x-x_B)^2 + (y-y_B)^2$$

che equivale a

$$(*) \qquad 2x(x_B - x_A) + 2y(y_B - y_A) + x_A^2 - x_B^2 + y_A^2 - y_B^2 = 0.$$

L'equazione (*) rappresenta una retta, perpendicolare al vettore $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ *equivalente al vettore* $\overrightarrow{AB}$.

Non resta che sostituire in (*) *le coordinate* $\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}$ *per verificare che il punto medio tra A e B giace sulla retta* (*).

Per l'esercizio 12

Calcolare la distanza tra le rette *s*, di equazione $-3x + 4y - 1 = 0$, ed *s'*, di equazione $12x - 16y = 0$.
Basta osservare che le due rette sono parallele, e la perpendicolare comune $4x + 3y = 0$ *le taglia nei punti* $\begin{pmatrix} -3/25 \\ 4/25 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. *La distanza tra le due rette è la distanza tra questi due punti, cioè* $\dfrac{\sqrt{3^2+4^2}}{25} = \dfrac{1}{5}$.

Gli esercizi 13, 14, 19 pongono, per lo spazio tridimensionale, le stesse domande degli esercizi 1, 2, 3 per lo spazio bidimensionale.

Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare standard, è assegnato il vettore $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

13. Determinare le componenti di tutti i vettori perpendicolari a **w.**

Risposta: $<\mathbf{u}, \mathbf{w}> = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 2\lambda + 3\mu \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

14. Verificare che il sottospazio Span{**w**} contiene due versori, determinandone le componenti.

Risposta: $\|t\mathbf{w}\| = 1 \Leftrightarrow t^2 \|\mathbf{w}\|^2 = 1 \Leftrightarrow t = \pm 1/\sqrt{4+9+1}$; *i versori sono* $\dfrac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ *e* $\dfrac{-1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

19. Sia ***a*** un vettore fissato in $\mathbb{R}^3$. Descrivere l'insieme di tutti i vettori ***v*** per cui è $<\boldsymbol{a},\boldsymbol{v}> = 0$.

Risposta: è l'insieme dei vettori $\overrightarrow{OP}$, *con P appartenente al piano per O, perpendicolare ad* ***a.***

Risposte ad esercizi su rette che vengono orientate mediante la scelta di un versore (parallelo alla retta).

15. Determinare i coseni direttori della retta di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 5 + t \end{cases}$, orientata nel verso delle x crescenti.

Risposta: $\cos(vers(r), \mathbf{i}) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \ \cos(vers(r), \mathbf{j}) = \dfrac{-2}{\sqrt{6}}, \ \cos(vers(r), \mathbf{k}) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}.$

16. Calcolare il coseno dell'angolo tra la retta *r* di equazioni (nel parametro *t*) $\begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$, orientata secondo il parametro *t* crescente, e la retta *s* di equazioni (nel parametro τ) $\begin{cases} x = 1 \\ y = \tau \\ z = 3 - 2\tau \end{cases}$, orientata nel verso delle *y* crescenti.

Risposta: $\cos(r, s) = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{6}\sqrt{5}} = \dfrac{4}{\sqrt{30}}.$

17 .Calcolare il vettore che è la proiezione ortogonale di $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sulla retta s di equazioni, nel parametro τ,

$\begin{cases} x = 1 \\ y = \tau \\ z = 3 - 2\tau \end{cases}$, orientata nel verso delle z crescenti.

Risposta: $$\frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

L'esercizio 18.

Quanti sono i vettori ortogonali ad $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$? Scrivere le loro componenti. Tra i vettori ortogonali a **u,** determinare quelli che formano un angolo di π/4 con $\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

I vettori ortogonali a **u** *sono gli infiniti vettori di* $Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, *di componenti* $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda - 2\mu,\ per\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ z = \mu \end{cases}$. *Perché il coseno dell'angolo tra uno di questi vettori e* **u'** *sia uguale al* cos(π/4) *deve essere* $\frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda - 2\mu \\ \mu \end{pmatrix}}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2 + (\lambda + 2\mu)^2 + \mu^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. *Elevando al quadrato e semplificando, si ottiene l'equazione omogenea di secondo grado* $2\lambda^2 + 4\lambda\eta - \mu^2 = 0$, *soddisfatta da* $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{-2 \pm \sqrt{6}}{2}$. *I vettori richiesti appartengono ai due sottospazi* $Span\left\{\begin{pmatrix} -1 + \sqrt{6}/2 \\ -1 - \sqrt{6}/2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, Span\left\{\begin{pmatrix} -1 - \sqrt{6}/2 \\ -1 + \sqrt{6}/2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

La risposta all'esercizio 21.

Scrivere un'equazione cartesiana del piano passante per $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ e perpendicolare alla retta di equazioni $x = y = z/2$.

Risposta: $(x - 2) + y + 2(z + 3) = 0$

L'esercizio 22.

Trovare il punto che è la proiezione ortogonale di $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ sul piano π di equazione $x + y + 2z = 1$; calcolare la distanza di P da π.

Il punto cercato è l'intersezione del piano π con la retta per P perpendicolare al piano, di equazioni parametriche $x = 2 + t$, $y = t$, $z = -3 + 2t$ *; è determinato dal valore di t che soddisfa l'equazione*

$$2 + t + t + 2(-3 + 2t) = 1,$$

cioè per $t = 5/6$. *La distanza di P da π è uguale alla distanza di P dal punto* $\begin{pmatrix} 17/6 \\ 5/6 \\ -8/6 \end{pmatrix}$ *, sua proiezione ortogonale su π, quindi è* $\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{10}{6}\right)^2} = \frac{5}{6}\sqrt{1+1+4}$.

La risposta all'esercizio 23.

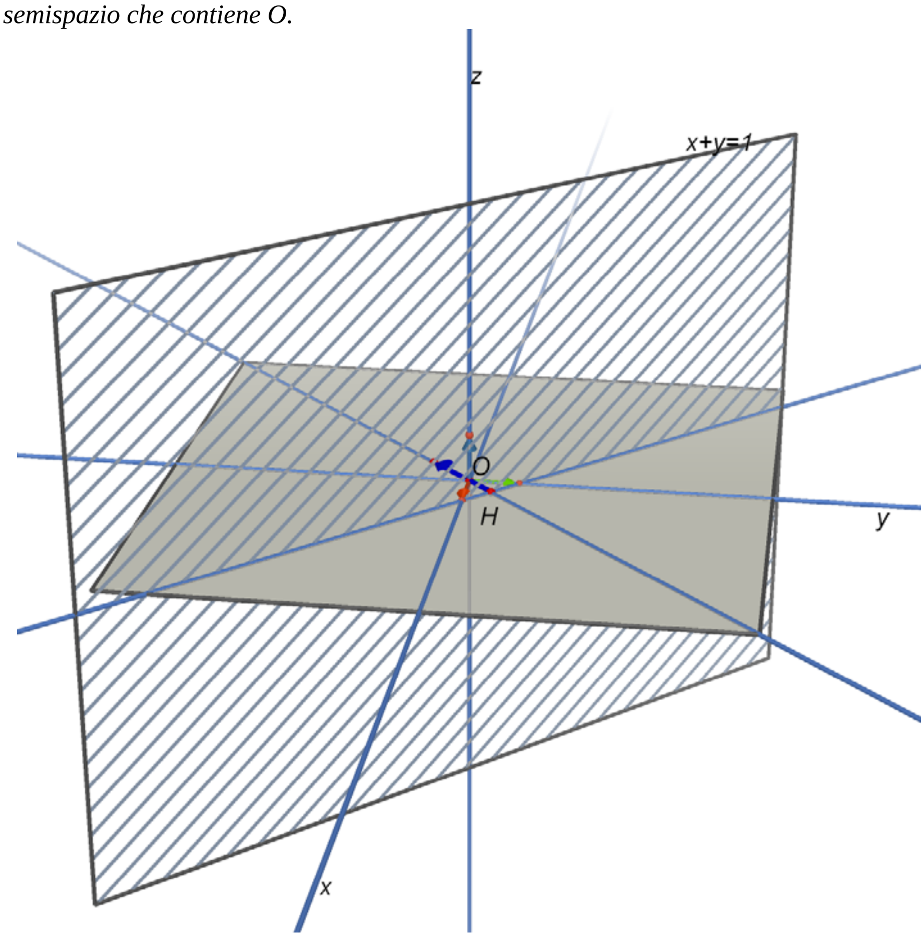
Verificare che tutti i piani che sono ortogonali al piano di equazione $x + 2y - z = 5$ nel punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ formano un fascio di piani.

Risposta: $a(x-2) + by + (a+2b)(z+3) = a(x+z+1) + b(y+2z+6) = 0.$

L'esercizio 24.

Calcolare il coseno dell'angolo tra i piani $x + y = 1$, $3x + z = 2$, orientati in modo che l'origine si trovi nei semispazi determinati dai versori normali scelti.

Nel disegno sono rappresentati: il piano degli assi x, y (in colore grigio), il piano x + y = 1 (a righe blu), la retta intersezione dei due piani, e la retta per O perpendicolare al secondo piano, sulla quale giace un vettore (blu) diretto verso il semispazio che contiene O.



I versori normali al piano $x + y = 1$ *sono* $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Quello che punta nel semispazio in cui sta O si può individuare osservando che, preso un punto qualsiasi H sul piano, il prodotto scalare del vettore* $\overrightarrow{HO}$ *con il* *versore normale giacente nello stesso semispazio è positivo. H può essere qualsiasi, ma è conveniente prenderlo coincidente con la proiezione ortogonale di O sul piano.*

Con $\overrightarrow{HO} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$, *si ha* $< \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} >= \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$, *dunque scegliamo il versore* $-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Nel caso del piano $3x + z = 2$, *preso su di esso il punto* $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, *si trova che è positivo il prodotto scalare di* $\overrightarrow{QO}$ *con* $\frac{-1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Il coseno dell'angolo tra i due piani così orientati è $\dfrac{\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2}\sqrt{10}} = \dfrac{3}{2\sqrt{5}}$.

L'esercizio 27.

Trovare delle equazioni che rappresentino la retta che è la proiezione ortogonale della retta $x = y = z$ sul piano $x = 0$.

La retta che dobbiamo cercare giace sul piano $x = 0$. *Per determinarla, basta trovare un altro piano che la contenga.*

Il secondo piano deve appartenere al fascio di piani che passano per la retta da proiettare

$$\lambda(x-y)+\mu(y-z)=0$$

e deve essere perpendicolare al piano $x = 0$, *perciò è determinato dai valori di* λ, μ *per i quali si ha*

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda+\mu \\ -\mu \end{pmatrix} \right\rangle = 0 .$$

Questa condizione di perpendicolarità è soddisfatta da $\lambda = 0$, *quindi il piano che stiamo cercando è* $y - z = 0$.
La retta proiezione ortogonale ha equazioni

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} .$$

La risposta all'esercizio 29

Esiste qualche retta perpendicolare a due piani distinti?
Se i due piani sono paralleli, ne esistono infinite (parallele tra loro); altrimenti, non ce n' è nessuna.