Commenti ad alcuni degli esercizi proposti
14. Usi del prodotto scalare e del prodotto vettore: distanze, aree e volumi.

La risposta all'esercizio 4.

(Dalla *prova scritta dell'esame di Geometria analitica* del 15 aprile 2009). Nello spazio è assegnato il piano π, di equazione $x + 2y - z = 0$. Rappresentare con equazioni cartesiane l'insieme dei punti la cui distanza da π è uguale a 1.

L'insieme è costituito dai due piani (paralleli) di equazioni $x+2y-z=\pm\sqrt{6}$.

L'esercizio 5

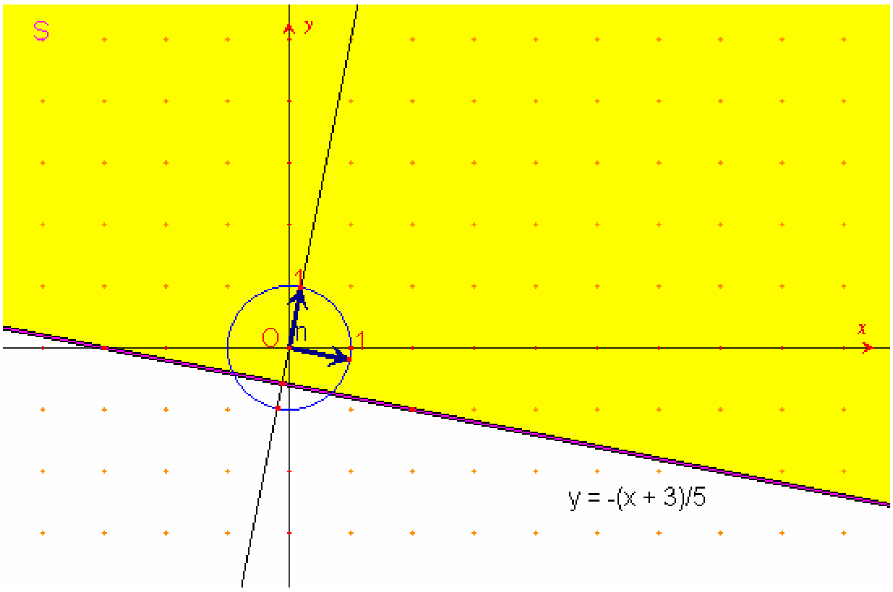
Ricordando una caratterizzazione geometrica delle bisettrici degli angoli di due rette, trovare le bisettrici delle rette di equazioni $x + 5y + 3 = 0$, $3x - 4y = 0$.

Le bisettrici sono il luogo dei punti equidistanti dalle due rette. Nel caso dell'esercizio, sono le rette di equazioni

$$\frac{x+5y+3}{\sqrt{26}}=\pm\frac{3x-4y}{5}$$

L'esercizio 6.

Su un foglio quadrettato, disegnare un sistema di assi cartesiani e rappresentarvi il sottoinsieme S definito dalla disequazione $x + 5y + 3 > 0$. Se si orienta la retta di equazione $x + 5y + 3 = 0$ in modo che il suo versore normale orientato ([1]) giaccia in S, quali sono i coseni direttori della retta?



I coseni direttori della retta, orientata in modo che il versore normale **n** *giaccia in S, sono* $\cos(r,\mathbf{i})=\frac{5}{\sqrt{26}}, \cos(r,\mathbf{j})=\frac{-1}{\sqrt{26}}$.

Risposta per l'esercizio 7

Su un foglio quadrettato, disegnare un sistema di assi cartesiani e rappresentarvi le rette di equazioni, rispettivamente, $x + y + 3 = 0$, $3x - 4y = 0$. Rappresentare con un sistema di disequazioni l'angolo che ha i lati su queste rette e che contiene il punto di coordinate (0,1).

Risposta:

$$\begin{cases} x+y+3\geq 0 \\ 3x-4y\leq 0 \end{cases}.$$

---

[1] Nel piano, data una retta r orientata, esiste un solo versore **n,** ortogonale ad r , per il quale l'angolo retto da *vers*(r) a **n** sia percorso in senso antiorario; si dice in tal caso che il versore normale è stato orientato in conseguenza dell'orientazione della retta**.**

L'esercizio 9.

Verificare che il punto $L = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ non appartiene alla retta l di equazioni cartesiane $\begin{cases} x+y=-1 \\ x+z=0 \end{cases}$ e trovare la distanza di L da l.

Sostituendo le coordinate di L nelle equazioni della retta l si vede che L giace nel primo dei due piani di cui l è l'intersezione, ma non nel secondo, quindi L non appartiene a l.

Per trovare dei parametri direttori di l, si può calcolare il prodotto vettoriale di vettori normali ai piani che individuano l

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Un'equazione del piano per L perpendicolare alla retta l è

$$<\mathbf{l}, \overrightarrow{LP}>=0, \text{ ossia } <\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-2 \\ y+3 \\ z-4 \end{pmatrix}>=(x-2)-(y+3)-(z-4)=0.$$

Questo piano incontra la retta l nel punto H (proiezione ortogonale di L su l) che è dato dalla soluzione del sistema $\begin{cases} x+y=-1 \\ x+z=0 \\ x-y-z=1 \end{cases}$ *; si trova* $H = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. *La distanza di L da l è uguale alla distanza di L da H, cioè* $\sqrt{(2)^2+(-3+1)^2+(4)^2} = \sqrt{24}$.

L'esercizio 10.

Verificare che le rette di equazioni cartesiane, rispettivamente, $\begin{cases} 4x-3z=5 \\ x+y=-3 \end{cases}$, $x = y = z - 1$ sono sghembe.

Scrivere un'equazione del piano che contiene la prima retta ed è parallelo alla seconda; calcolare la distanza tra le due rette.

La verifica richiesta può essere fatta in più modi (si veda Commenti, 10): o controllando che la matrice, completa, del sistema formato dalle quattro equazioni cartesiane delle due rette, ha il rango massimo, oppure verificando che le rette non sono né incidenti né parallele.

I piani che contengono la prima retta sono dati, per λ, μ *non contemporaneamente nulli, da*

$$(F) \qquad \lambda(4x-3z-5)+\mu(x+y+3)=0.$$

La seconda retta, di parametri direttori (1,1,1), *è parallela ad uno di questi piani se il vettore* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *è ortogonale alla direzione normale al piano, che è data da* $\begin{pmatrix} 4\lambda+\mu \\ \mu \\ -3\lambda \end{pmatrix}$*; deve essere perciò*

$$<\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4\lambda+\mu \\ \mu \\ -3\lambda \end{pmatrix}>=4\lambda+\mu+\mu-3\lambda=\lambda+2\mu=0.$$

Quindi, un'equazione del piano per la prima retta parallelo alla seconda si ottiene ponendo $\lambda = -2$, $\mu = 1$ *nella (F):*

$$-7x+y+6z+13=0.$$

La distanza tra le due rette è uguale alla distanza da questo piano di un punto qualsiasi, ad esempio (0,0,1), *della seconda retta; sostituendo le coordinate del punto alle variabili nell'equazione normalizzata del piano si trova che la distanza tra le due rette è*

$$\left|\frac{6+13}{\sqrt{86}}\right|.$$

Sull'esercizio 11.

Verificare che le rette di equazioni $x = y = z - 1$, $\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ 2x - y - z - 4 = 0 \end{cases}$ non sono incidenti, e calcolare la loro distanza.

Si trova che le due rette sono parallele. Intersecandole con un piano ad esse perpendicolare, per esempio con

$$x + y + z = 1$$

si trovano i due punti (0,0,1) , (5/3,–4/3,2/3). *La distanza tra questi due punti*

$$\frac{\sqrt{25+16+1}}{3}$$

è uguale alla distanza tra le due rette.

La risposta all'esercizio 12.

Calcolare l'area del parallelogrammo che ha come vertici consecutivi i punti del piano $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Si può pensare il piano immerso nello spazio, come piano di equazione $z = 0$*; allora il vettore applicato nell'origine ed equivalente al vettore* $\overrightarrow{AB}$ *ha componenti* $\begin{pmatrix} -2+1 \\ -1-4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$; *il vettore equivalente a* $\overrightarrow{AC}$ *ha componenti* $\begin{pmatrix} 3/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. *L'area del parallelogrammo è* $\left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+15/2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{17}{2}$.

L'esercizio 13.

(Dalla *prova d'esame di Geometria analitica del* 18 settembre 2009). Calcolare **in due modi diversi** l'area del triangolo che ha come vertici i punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L'area del triangolo è la metà dell'area del parallelogrammo con i vertici A, B, C, quindi è

$$\frac{1}{2}\left\| \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC} \right\| = \frac{1}{2}\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Oppure, si può ottenere moltiplicando metà della lunghezza, b, di un lato, per la misura, h, dell'altezza relativa da esso:

$$Area = {}^{bh}\!/_{2}.$$

*Conviene scegliere il lato BC, di misura b =*1*, perché è facile calcolarne la distanza da A; infatti, per avere la proiezione ortogonale di A sul lato BC bisogna intersecare la retta di B e C, di equazioni* $\begin{cases} y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ *con il piano ad essa perpendicolare che passa per A, cioè il piano* $x = 1$. *La proiezione ortogonale di A sulla retta BC è quindi il punto* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$*; la distanza tra questo punto ed A è* $h = \sqrt{(1-1)^2 + 1 + 1} = \sqrt{2}$.

In conclusione, ${}^{bh}\!/_{2} = {}^{\sqrt{2}}\!/_{2}$.