Commenti ad alcuni degli esercizi proposti
15. Sottospazi ortogonali, basi ortogonali, isometrie.

L'esercizio 1

Nello spazio $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare usuale (euclideo), si consideri il sottospazio **U** generato dai vettori $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a. Determinare il sottospazio $\mathbf{U}^\perp$ dei vettori che sono ortogonali a tutti i vettori di **U;**
b. trovare una base ortogonale (cioè tale che i suoi elementi siano vettori a due a due ortogonali) $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$, con $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$ in **U,** $\mathbf{u}_3$ in $\mathbf{U}^\perp$**.**

a. Nello spazio $\mathbb{R}^3$, *lo spazio dei vettori ortogonali a due vettori indipendenti è generato dal loro "prodotto vettore":* $\mathbf{U}^\perp = Span\{\mathbf{u} \wedge \mathbf{w}\} = Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}\right\}$.

b. Possiamo scegliere $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}$. *Determiniamo* $\mathbf{u}_2 = k\,\mathbf{u}_1 + \mathbf{w}$ *imponendo che sia* $<\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2> = 0$, *cioè*

$$k <\mathbf{u},\mathbf{u}> + <\mathbf{u},\mathbf{w}> = 0, \text{ da cui } k = \frac{-<\mathbf{u},\mathbf{w}>}{<\mathbf{u},\mathbf{u}>}.$$

Troviamo

$$\mathbf{u}_2 = -\frac{7}{5}\mathbf{u} + \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$$

Una base ortogonale che soddisfa i requisiti è dunque

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}.$$

L'esercizio 2

Nello spazio $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare standard, si consideri il sottospazio **V** generato dai vettori $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a. Determinare e studiare l'insieme $\mathbf{V}^\perp$ dei vettori che sono ortogonali a tutti i vettori di **V.**
b. E' vero o falso che è $\mathbb{R}^4 = \mathbf{V} \oplus \mathbf{V}^\perp$?
c. Trovare una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$ formata da vettori di **V** e $\mathbf{V}^\perp$**.**

a. Lo spazio $\mathbf{V}^\perp$ *è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo* $\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$, *quindi è il sottospazio vettoriale bidimensionale*

$$\mathbf{V}^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ -s \\ t \end{pmatrix}, s,t \in \mathbb{R} \right\} = Span\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

b. E' vero. L'intersezione dei due sottospazi è costituita dal solo vettore **0,** *e lo spazio somma è generato da quattro vettori tra loro linearmente indipendenti:* **v, w,** *e la coppia che costituisce una base di* $\mathbf{V}^\perp$.

c. $B=\left\{\mathbf{v},\mathbf{w},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

La risposta all'esercizio 4.

Nello spazio $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare, trovare una base ortonormale $\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3\}$ con $\mathbf{b}_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$ e tale che sia $\mathrm{Span}\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2\}=\mathrm{Span}\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$ e che la matrice del cambiamento di base abbia determinante positivo.

Risposta:

$$\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3\}=\left\{\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Per l'esercizio 5.

In $\mathbb{R}^n$, dotato del prodotto scalare standard, è assegnata una base ortonormale B. Sia **M** la matrice del cambiamento di base, dalla base standard a B. Dimostrare che è $\mathbf{M}\,\mathbf{M}^{\mathbf{T}}=\mathbf{I}$ (**M** è una matrice *ortogonale*)**.**

E' una delle affermazioni del corollario 11.19 *del libro* Abate & de Fabritiis, Geometria analitica con elementi di algebra lineare, McGraw Hill, 2006, cap. 11, pag. 223. *Bisogna dimostrare che* $\mathbf{M}^{\mathbf{T}}$ *è la matrice inversa di* **M;** *poiché si sa che l'inversa destra è anche inversa sinistra, basta dimostrare che è* $\mathbf{M}^{\mathbf{T}}\mathbf{M}=\mathbf{I}$**.** *Come si costruisce l'elemento di posto* i, j *del prodotto?*

Per l'esercizio 8.

Per ciascuna delle isometrie di $\mathbb{R}^2$ associate alle matrici

$$i)\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix};ii)\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix};iii)\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix};iv)\begin{pmatrix}1/2&\sqrt[2]{3}/2\\\sqrt[2]{3}/2&-1/2\end{pmatrix}$$

trovare le immagini dei vettori $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$. Individuare, per ciascuna isometria, se esistono dei vettori che restano fissi, cioè che hanno come corrispondenti se stessi.

Si osservi che **a** *è il versore che forma l'angolo* $\pi/3$ *con l'asse delle x,* **b** *è un vettore che forma* $-\pi/4$ *con l'asse x. Calcolando il prodotto della matrice i) con* **b** *si trova che* **b** *resta fisso in questa isometria, mentre* **a** *va nel versore che forma un angolo di* $7\pi/6$ *con l'asse delle x. Per determinare tutti i vettori che restano fissi nella isometria associata alla i), si deve risolvere il sistema lineare*

$$\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\ cio\grave{e}\ \begin{cases}-y=x\\-x=y\end{cases}$$

che si riduce all'unica equazione $x+y=0$. *Restano fissi i vettori adagiati sulla bisettrice del secondo e quarto quadrante: i) rappresenta la riflessione rispetto a questa retta.*
Con considerazioni analoghe, si trova che ii) è associata alla rotazione di $\pi/2$*, in cui resta fisso solo il vettore* **0**;
iii) è la matrice della rotazione di $\pi/4$ *; iv) manda* **a** *nel versore* **i** *dell'asse delle x,* **b** *in un vettore del terzo quadrante, e tiene fissi i vettori del sottospazio di equazione* $-x+\sqrt{3}y=0$ *, cioè la retta con pendenza di* $\pi/6$*, quindi è la riflessione rispetto a questa retta.*

L'esercizio 9.

Stabilire se vi siano vettori che rimangano fissi nell'isometria di $\mathbb{R}^3$ associata alla matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

determinare le immagini dei sottospazi Span{$\mathbf{e}_1$}, Span{$\mathbf{e}_2$,$\mathbf{e}_3$}.

I vettori fissi sono le soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \textit{ cioè } \begin{cases} -x = x \\ -z = y \\ -y = z \end{cases}, \textit{ equivalente a } \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0. \end{cases}$$

Restano fissi i vettori del sottospazio $Span\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.

I vettori di Span{$\mathbf{e}_1$}, *Span*{$\mathbf{e}_2$,$\mathbf{e}_3$} *non sono fissi, ma si ha*

$$Im(\text{Span}\{\mathbf{e}_1\}) = Span\{\mathbf{e}_1\},\ Im(Span\{\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}) = Span\{\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}.$$

L'isometria che stiamo studiando è la rotazione di π *intorno alla retta che, nel piano degli assi y, z, è la bisettrice degli angoli definiti dalla disuguaglianza* $y\,z < 0$.
In questo "mezzo giro", l'asse delle x va su se stesso, e anche il piano $x = 0$ *si ribalta su se stesso.*
Nel disegno, si vedono, nel piano x = 0 evidenziato dalle righe, un triangolo e la sua immagine nel mezzo giro attorno alla retta segnata in rosso.