Commenti ad alcuni degli esercizi proposti
16. Punti fissi; autovettori.

L'esercizio 1.

Nel piano, riferito a coordinate cartesiane ortogonali, si consideri l'affinità φ così definita

$$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3 \\ 2y-2 \end{pmatrix}.$$

Verificare che φ tiene unito un punto C, applica su se stessa ogni retta per C ed applica una qualunque retta non passante per C in una retta parallela ad essa.

Le coordinate del punto C sono la soluzione del sistema $\begin{cases} 2x+3=x \\ 2y-2=y \end{cases}$, *cioè* $(-3,2)$.

Un punto P appartenente ad una retta per C ha le coordinate $x = -3 + lt$, $y = 2 + mt$, *per dati l, m, t; la sua immagine* $\varphi(P)$ *è il punto di coordinate* $x' = -6 + 2lt + 3 = -3 + l(2t)$, $y' = 4 + 2mt - 2 = 2 + m(2t)$, *che appartiene alla stessa retta.*

Consideriamo una retta r, che passa per $Q_0 = (x_0,y_0)$ *ed ha parametri direttori* (a,b). *L'immagine di un suo punto* $Q = (x_0 + as, y_0 + bs)$, $s \in \mathbb{R}$, *è* $\varphi(Q) = (2x_0 + 3 + 2as, 2y_0 - 2 + 2bs)$, *cioè un punto che sta sulla la retta di parametri direttori* $(2a,2b)$, *quindi parallela ad r, e passante per* $\varphi(Q_0) = (2x_0 + 3, 2y_0 - 2)$.

La risposta all'esercizio 2.

Verificare, trovandone i punti fissi, che l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^2$ associata alla matrice $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$

è un riflessione.

Risposta: i punti uniti sono i punti della retta di equazione $x-2y=0$. $\mathbf{M}$ *è una matrice ortogonale, associata ad una isometria dello spazio vettoriale* $\mathbb{R}^2$; *una isometria piana che tenga uniti tutti i punti di una retta è una riflessione (simmetria ortogonale) rispetto a quella retta, dunque* $\mathbf{M}$ *è associata alla riflessione di asse* $x-2y=0$. .

L'esercizio 3.

Usando la definizione di riflessione rispetto ad una retta, oppure utilizzando dei cambiamenti di base, trovare le relazioni tra le coordinate (a,b) di un punto P del piano e le coordinate (a',b') del punto P' che è l'immagine di P nella riflessione rispetto alla retta di equazione $y = 5x$.

Per definizione di riflessione, la retta che congiunge P' con P (di parametri direttori $(a-a',b-b')$*) è perpendicolare alla retta* $y = 5x$ *(di parametri direttori* $(1,5)$*) e la interseca nel punto medio tra P e P'; perciò, si ha:*

$$\begin{cases} (a-a')+5(b-b')=0 \\ 5\dfrac{a+a'}{2}-\dfrac{b+b'}{2}=0 \end{cases},$$

da cui

$$\begin{cases} a+5b=a'+5b' \\ 5a-b=-5a'+b' \end{cases}.$$

Notiamo che il sistema è simmetrico nelle coppie di variabili (a,b) e (a'b'). Dati (a',b'), si ricavano (a,b), risolvendo il sistema lineare che ha come matrice dei coefficienti $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ *; si trova*

$$a = \frac{-12a'+5b'}{13}, b = \frac{5a'+12b'}{13}.$$

Altrimenti, si può cambiare la base di $\mathbb{R}^2$, *prendendo come primo vettore della nuova base un versore con la direzione della retta* $y = 5x$. *Indichiamo con* $\mathbf{X}$ *il vettore colonna delle coordinate nella base iniziale, con* $\mathbf{Z}$ *quello delle coordinate nella nuova base; il legame tra le nuove e le vecchie coordinate è dato da*

$$\mathbf{X} = \mathbf{BZ},\ \ con\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{26}} & \frac{-5}{\sqrt{26}} \\ \frac{5}{\sqrt{26}} & \frac{1}{\sqrt{26}} \end{pmatrix}.$$

Nella nuova base, la riflessione è associata alla matrice

$$\mathbf{M}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sia $\mathbf{M}$ *la matrice della riflessione rispetto alla vecchia base:*

$$\mathbf{X}' = \mathbf{MX}.$$

Da

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{M}^*\mathbf{Z},$$

sostituendo al posto di **Z, Z’** *le loro espressioni* $\mathbf{Z}' = \mathbf{B}^T\mathbf{X}'$, $\mathbf{Z} = \mathbf{B}^T\mathbf{X}$, *si ricava:*

$$\mathbf{B}^T\mathbf{X}' = \mathbf{M}^*\mathbf{BX},\ \ quindi\ \mathbf{X}' = \mathbf{BM}^*\mathbf{B}^T\mathbf{X},$$

$$con\ \ \mathbf{M} = \mathbf{BM}^*\mathbf{B}^T.$$

Perciò

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{26}} & \frac{-5}{\sqrt{26}} \\ \frac{5}{\sqrt{26}} & \frac{1}{\sqrt{26}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{26}} & \frac{5}{\sqrt{26}} \\ \frac{-5}{\sqrt{26}} & \frac{1}{\sqrt{26}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{26}} & \frac{5}{\sqrt{26}} \\ \frac{5}{\sqrt{26}} & \frac{-1}{\sqrt{26}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{26}} & \frac{5}{\sqrt{26}} \\ \frac{-5}{\sqrt{26}} & \frac{1}{\sqrt{26}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-12}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \end{pmatrix}.$$

L’esercizio 4

Determinare la matrice ortogonale (del terzo ordine) della riflessione di $\mathbb{R}^3$ rispetto al piano di equazione

$$x - y = 0.$$

Come per l’esercizio 3, *per ricavare le relazioni tra le coordinate di punti corrispondenti, si può usare la definizione di simmetria, oppure utilizzare un cambiamento di base che porti il piano* $x - y = 0$ *a coincidere con il piano* $Z = 0$. *Il terzo versore della nuova base è ortogonale al piano* $x - y = 0$, *i primi due devono giacere in questo piano. Possiamo scegliere il cambiamento di base dato dalla matrice ortogonale* $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Come per il caso dell’esercizio 3, *la matrice associata alla riflessione è* $\mathbf{M} = \mathbf{BM}^*\mathbf{B}^T$, *con* $\mathbf{M}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

Si trova

$$\mathbf{M} = \mathbf{BM}^*\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per l’esercizio 5.

Trovare la matrice, ortogonale di ordine 3, della rotazione di 45° intorno alla retta $\begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$

In analogia con i casi precedenti, considerata una nuova base, in cui il terzo versore abbia la direzione della retta data, si costruisce il prodotto $\mathbf{M} = \mathbf{BM}^*\mathbf{B}^T$, *con* $\mathbf{M}^* = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *(matrice della rotazione di* 45° *attorno al terzo asse coordinato).*

L'esercizio 6

Determinare, se esistono, gli autovalori e gli autospazi delle matrici reali

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 2 & 2\end{pmatrix};\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix};\mathbf{C}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 4\end{pmatrix};\mathbf{D}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$ *è*

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\det\begin{pmatrix}2-\lambda & -2\\ 2 & 2-\lambda\end{pmatrix}=(2-\lambda)^2+4.$$

Questo polinomio non si annulla per nessun valore reale di λ*, perché è una somma di quadrati, che ha solo valori positivi, con valore minimo* 4*; quindi,* $\mathbf{A}$ *non ha autovalori reali. .*
Il polinomio caratteristico di $\mathbf{B}$ *è*

$$\det(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I})=\det\begin{pmatrix}2-\lambda & 2\\ 2 & -2-\lambda\end{pmatrix}=\lambda^2-4-4.$$

$\mathbf{B}$ *possiede due autovalori distinti* $\lambda=\pm\sqrt{8}$. *L'autospazio associato a* $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ *è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare* $(\mathbf{B}-\sqrt{8}\mathbf{I})\mathbf{X}=\mathbf{0}$*, che, dato che la matrice è singolare, si riduce ad una sola equazione:*

$$(2-2\sqrt{2})x+2y=0,\quad \textit{cioè}\quad (1-\sqrt{2})x+y=0.$$

L'autospazio associato $\sqrt{8}$ *è* $\operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}-1\end{pmatrix}\right\}$*; analogamente, si trova che l'autospazio associato a* $-\sqrt{8}$ *è* $\operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{2}-1\end{pmatrix}\right\}$.

Il polinomio caratteristico di $\mathbf{C}$ *è* $(\lambda-2)^2=0$*; l'unico autospazio è generato dal vettore* $\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$.

$\mathbf{D}$ *ha gli autovalori* 2, 0. *L'autospazio associato a* 2 *è generato da* $\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$*, l'autospazio relativo a* 0 *è il nucleo dell'applicazione lineare di matrice* $\mathbf{D}$*, generato dal vettore* $\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.

Sull'esercizio 9.

In base ai risultati ottenuti per gli esercizi 6, 7, 8, indicare quali tra le matrici di quegli esercizi siano diagonalizzabili e, per ciascuna di quelle, trovare un cambiamento di base che la porti in forma diagonale.

Si tenga presente il criterio di diagonalizzabilità per le matrici reali: la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori (reali) deve essere uguale all'ordine della matrice, e, per ciascun autovalore, la molteplicità algebrica deve essere uguale alla molteplicità geometrica (dimensione dell'autospazio associato).

L'esercizio 10.

Trovare una matrice del secondo ordine per la quale il vettore $\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$ sia un autovettore associato all'autovalore 3 e $\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ sia associato all'autovalore 5.

Le colonne della matrice sono le immagini dei vettori della base, quindi è nota la seconda colonna della matrice, poiché l'immagine del vettore $\mathbf{e}_2$ è $5\mathbf{e}_2$ *. Inoltre:*

$$\begin{pmatrix}a & 0\\ b & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$$

da cui $\begin{cases}2a=6\\ 2b-5=-3\end{cases}$. *La matrice è*

$$\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 5\end{pmatrix}.$$