Commenti ad alcuni degli esercizi proposti
17. Diagonalizzazione di matrici simmetriche. Studio di coniche.

L'esercizio 1.

Scegliere delle basi ortonormali in $\mathbb{R}^2$ in modo che rispetto a tali basi le applicazioni associate a ciascuna delle matrici simmetriche

$$\mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

siano in forma diagonale.

Il polinomio caratteristico di **H** *è*

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda + 1)(\lambda - 3).$$

All'autovalore -1 *è associato l'autospazio soluzione dell'equazione* $2x + 2y = 0$. *Come generatore di questo autospazio possiamo scegliere il versore* $\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Per l'autovalore 3 *otteniamo gli autovettori che risolvono l'equazione* $-2x + 2y = 0$. *Come base di questo autospazio prendiamo* $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Verifichiamo che nella nuova base di $\mathbb{R}^2$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$ *, l'endomorfismo è rappresentato d una matrice diagonale:*

$$\mathbf{B}^T \mathbf{H}_2 \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{E}_2$ *ha il polinomio caratteristico* $\lambda^2 - 13\lambda + 36 = (\lambda - 4)(\lambda - 9)$.

L'autospazio associato all'autovalore 9 *si ottiene risolvendo l'equazione* $-2x - y = 0$; *una base di questo autospazio è* $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$. *All'autovalore* 4 *è associato l'autospazio generato da un versore ortogonale al precedente. Procedendo come sopra, si costruisce la matrice del cambiamento di base* $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$*; il prodotto* $\mathbf{M}^\mathbf{T}\mathbf{E}_2\mathbf{M}$ *è la matrice diagonale* $\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Nel caso di $\mathbf{P}_2$ *un autovalore è* 0, *l'altro è* 10. *Per* $\lambda = 0$, *si ottiene l'equazione del nucleo* $x + 3y = 0$; *una base del nucleo è il versore* $\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. *All'autovalore* 10 *corrisponde l'autospazio di equazione* $-3x + y = 0$.

Il cambiamento di base di matrice $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ -1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$ *porta alla forma diagonale* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$.

L'esercizio 3.

Studiare, determinandone gli eventuali centro, assi, asintoti, le coniche

$$\begin{aligned}
&a)\ 13x^2-10xy+13y^2-1=0\\
&b)\ x^2+4xy+4y^2-4x=0\\
&c)\ x^2-4xy+3y^2-6y-1=0\\
&d)\ 3x^2-8xy-3y^2-1=0\\
&e)\ x^2+y-8x+4y+20=0
\end{aligned}.$$

Per ciascuna conica, indicare un cambiamento di coordinate che porti l'equazione in forma canonica e scrivere la forma canonica.

Nel caso a), la matrice dei coefficienti è $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}13&-5&0\\-5&13&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$. *Poiché det***A** *è diverso da* 0, *l'equazione rappresenta una conica non specializzata. Il determinante della matrice* $\mathbf{A}_2$ *dei coefficienti dei termini di secondo grado è* 13^2-5^2, *che è un numero positivo, quindi la conica è un'ellisse. Poiché nell'equazione mancano i termini di primo grado, la curva è simmetrica rispetto all'origine: il centro della conica è il punto O, origine del sistema di riferimento.*
Gli assi sono le rette per il centro della conica aventi la direzione degli autovettori della matrice $\mathbf{A}_2$. *L'equazione caratteristica è* $\lambda^2-26\lambda+144=(\lambda-18)(\lambda-8)$.
All'autovalore 18 *corrisponde l'autospazio di equazione* $x+y=0$, *generato dal versore* $\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$; *all'autovalore* 8 *è associato l'autospazio di equazione* $x-y=0$, *generato dal versore* $\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$. *Gli assi della conica sono esattamente le rette* $x\pm y=0$.
Il cambiamento di coordinate $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ *porta l'equazione dell'ellisse nella forma* $18X^2+8Y^2=1$,

o anche $\dfrac{X^2}{1/18}+\dfrac{Y^2}{1/8}=1$.

Nel caso b) la matrice dei coefficienti è $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&0\\-2&0&0\end{pmatrix}$, *non singolare, quindi la conica non è degenere.*
Poiché il determinante della matrice $\mathbf{A}_2$ *è* 0, *la conica è una parabola.*
L'equazione caratteristica ha le radici 5, 0. *La direzione dell'asse è quella del sottospazio vettoriale nucleo dell'applicazione associata ad* $\mathbf{A}_2$, *individuato dall'equazione* $x+2y=0$. *Poiché un versore appartenente a questo sottospazio è* $\begin{pmatrix}2/\sqrt{5}\\-1/\sqrt{5}\end{pmatrix}$, *consideriamo il cambiamento di coordinate* $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$, *che fa passare dall'equazione*

$$\begin{pmatrix}x&y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}x&y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}=0$$

all'equazione

$$\begin{pmatrix}X&Y\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}X&Y\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}=0.$$

Non è necessario calcolare i prodotti di matrici, perché (salvo errori precedenti) la parte di secondo grado deve risultare in forma diagonale; l'unico calcolo necessario è quello per la parte di primo grado; si ottiene

$$\begin{pmatrix}X&Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\frac{2}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}X&Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}=0,$$

cioè, moltiplicando per il denominatore comune

$$5\sqrt{5}Y^2-8X-4Y=0.$$

La tangente nel vertice della parabola è, tra le rette perpendicolari all'asse, quella che interseca la parabola in due punti coincidenti; la possiamo determinare cercando, tra le rette di equazione X = h, quella per cui l'equazione

$$\text{(V)} \quad 5\sqrt{5}Y^2 - 4Y - 8h = 0$$

ha due radici coincidenti. Il discriminante di questa equazione è $4(1+10\sqrt{5}h)$, *quindi la tangente nel vertice è la retta* $X = -\dfrac{1}{10\sqrt{5}}$. *Dall'equazione* (V), *sostituendo ad h il valore trovato, si ricava* $Y = 2/5\sqrt{5}$.

Quindi, il vertice ha le coordinate $X = -\dfrac{1}{10\sqrt{5}}, Y = \dfrac{2}{5\sqrt{5}}$, *; nel riferimento iniziale, le coordinate del vertice sono*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/10\sqrt{5} \\ 2/5\sqrt{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \dfrac{-1}{5\sqrt{5}} + \dfrac{2}{5\sqrt{5}} \\ \dfrac{1}{10\sqrt{5}} + \dfrac{4}{5\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{25} \\ \dfrac{9}{50} \end{pmatrix}.$$

Nelle coordinate iniziali, l'asse della parabola è la retta di equazione

$$x - \frac{1}{25} + 2(y - \frac{9}{50}) = x + 2y - \frac{10}{25} = 0.$$

La traslazione

$$X = X' - \frac{1}{10\sqrt{5}}, Y = Y' + \frac{2}{5\sqrt{5}}$$

riduce l'equazione alla forma canonica

$$5\sqrt{5}Y'^2 - 8X' = 0, \quad \textit{ovvero } Y'^2 = \frac{8}{5\sqrt{5}}X' \cdot$$

Nel caso c) la matrice dei coefficienti è $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, *non singolare, quindi la conica non è degenere.*

Poiché il determinante della matrice $\mathbf{A}_2$ *è negativo, la conica è un'iperbole.*
Le coordinate del centro sono la soluzione del sistema

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x + 3y = 3 \end{cases}, \textit{ cioè } x = -6, y = -3.$$

Le direzioni asintotiche sono le radici della parte di secondo grado $x^2 - 4xy + 3y^2$. *Ponendo* $t = x/y$, *si ha l'equazione*

$$t^2 - 4t + 3 = (t-1)(t-3) = 0 \cdot$$

Otteniamo così le direzioni delle rette $x - y = 0$, $x - 3y = 0$, *gli asintoti sono le rette parallele a queste, condotte per il centro:*

$$x - y + 3 = 0, x - 3y - 3 = 0.$$

Gli assi sono le rette per il centro la cui direzione è determinata dagli autospazi della matrice $\mathbf{A}_2$. *Risolvendo l'equazione caratteristica*

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0$$

si trovano gli autovalori $2 \pm \sqrt{5}$ *; all'autovalore maggiore è associato l'autospazio delle soluzioni dell'equazione*

$$(-1-\sqrt{5})x - 2y = 0.$$

Si può già concludere che un asse è la retta (parallela all'autospazio e passante per il centro)

$$(1+\sqrt{5})(x+6) + 2(y+3) = 0 .$$

La perpendicolare a questa, per il centro, è l'altro asse. Avendo già trovato gli asintoti, si potevano determinare gli assi cercando le bisettrici degli asintoti, come luogo dei punti equidistanti da esse; lo facciamo a scopo di verifica dei risultati fin qui ottenuti: troviamo infatti le due equazioni

$$\frac{x + y - 3}{\sqrt{2}} = \pm\frac{x - 3y - 3}{\sqrt{10}} \cdot$$

Portando il centro nell'origine con il cambiamento di coordinate $x = x^* - 6$, $y = y^* - 3$, *si arriva alla forma priva dei termini lineari*

$$x^{*2} - 4x^*y^* + 3y^{*2} + c = 0$$

dove c *è il valore che il polinomio iniziale prende sulle coordinate del centro:*

$$c = 6^2 - 4(6\cdot 3) + 3\cdot 3^2 - 6(-3) - 1 = 36 - 72 + 27 + 18 - 1 = 8\,.$$

Per arrivare alla forma canonica occorre un cambiamento di base ortonormale, con la matrice $\frac{1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 2 & 1+\sqrt{5} \\ -1-\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}$ *(oppure la matrice che si ottiene da questa scambiando le colonne o cambiano un versore con il suo opposto).*

Componendo le due operazioni, si ha in definitiva un cambiamento di coordinate come questo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 2 & 1+\sqrt{5} \\ -1-\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

che produce l'equazione

$$\frac{X^2}{-8/(2+\sqrt{5})} + \frac{Y^2}{-8/(2-\sqrt{5})} = 1$$

L'asse traverso risulta coincidere con l'asse delle Y, quindi per ottenere la forma standard è necessario un ulteriore scambio di assi.

Il caso d) è un'iperbole equilatera con il centro nell'origine, asintoti di equazioni $x - 3y = 0$, $3x + y = 0$, *assi* $2x - y = 0$, $x + 2y = 0$, *forma canonica* $5(X^2 - Y^2) = 1$.

e) è una conica degenere. L'equazione si può riscrivere nella forma $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 0$*; il solo punto che la soddisfa è* (4,–2).

La risposta all'esercizio 7.

Scrivere un'equazione della parabola che ha come direttrice la retta $x = y$ ed il fuoco nel punto (0,−1). Qual è il vertice di questa parabola?

Risposta: $(x-y)^2 = x^2 + (y-1)^2$*; il vertice è* $(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4})$*, punto medio tra il fuoco e l'intersezione della direttrice con la perpendicolare condotta dal fuoco (cioè, l'asse della parabola),.*

Le risposte all'esercizio 9.

Scrivere delle equazioni parametriche per le coniche di equazioni

$$(x-2)^2 + 9(y+2)^2 - 36 = 0\,,\qquad x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0,\qquad 4x + y^2 = 0.$$

Risposte: $\begin{cases} x = 2 + 6\cos\alpha \\ y = -2 + 2\sin\alpha \end{cases}$; $\begin{cases} x = 1 + \sqrt{2}\cos\alpha \\ y = \sqrt{2}\sin\alpha \end{cases}$; $\begin{cases} x = -t^2/2 \\ y = t \end{cases}$.

L'esercizio 14.

Se esiste una circonferenza che passi per i punti $L = (-1,-1)$, $M = (0,-8)$ e per l'origine $O = (0,0)$, trovarne il centro, il raggio, un'equazione, e la retta tangente nell'origine.

I punti L, M, O non sono allineati, perché i vettori $\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix}$ *sono linearmente indipendenti; quindi esiste una circonferenza che passa per L, M, O. Poiché il suo centro C è equidistante dai tre punti, le coordinate di C verificano le eguaglianze*

$$(*)\qquad x^2 + y^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2 = x^2 + (y+8)^2$$

Dalle (*) *si ricava che C è il punto comune a tre rette, gli assi dei segmenti che hanno come estremi i tre punti dati; consideriamo solo due di queste rette*

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2 = 0 \\ 16y + 64 = 0 \end{cases}$$

per ricavare che C ha le coordinate (3,–4); *il raggio è la distanza di questo punto da O, che è* 5. *La circonferenza ha equazione*

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 3^2 + 4^2$$

cioè

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0.$$

La tangente alla circonferenza in O è perpendicolare alla retta che congiunge O con il centro C, ossia è perpendicolare al vettore $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$*; l'equazione della tangente è*

$$3x - 4y = 0.$$

Per l'esercizio 15.

Trovare un'equazione della circonferenza che passa per $A = (2,4)$ ed è tangente in $B = (-2,-1)$ alla retta di equazione $x - 2y = 0$.

Il centro si trova intersecano l'asse del segmento AB con la perpendicolare in B alla retta tangente $x - 2y = 0$.

L'esercizio 20.

Scegliendo opportunamente il sistema di riferimento, dimostrare che il luogo dei punti medi delle intersezioni di una parabola con le rette per il suo vertice è ancora una parabola.

Scelto il riferimento in modo che l'asse della parabola sia l'asse delle ascisse e il vertice della parabola sia l'origine delle coordinate, si deve determinare il punto medio tra le intersezioni della curva di equazione

$$y^2 - 2px = 0$$

con le rette del fascio

$$y = mx.$$

Per ogni retta, le due intersezioni corrispondono ai valori di x che sono radici dell'equazione

$$m^2x^2 - 2px = x(m^2x - 2p) = 0\,,$$

quindi le intersezioni sono i punti di coordinate $(0,0)$, $(2p/m^2, 2p/m)$.
Per ogni retta, il punto medio tra le intersezioni ha le coordinate

$$\text{(P)} \qquad x = \frac{p}{m^2}\,,\; y = \frac{p}{m}.$$

Le (P) *sono le equazioni parametriche del luogo richiesto. Eliminando tra queste il parametro m, si ottiene l'equazione cartesiana di una parabola, con lo stesso asse e vertice di quella data*

$$y^2 - px = 0\,.$$

L'esercizio 23.

Trovare un'equazione polare per l'ellisse di eccentricità 1/4, con un fuoco a distanza 2 dalla relativa direttrice.

Prendiamo il fuoco O come polo, l'asse polare coincidente con l'asse delle ascisse del sistema cartesiano associato a quello polare, e come direttrice la retta d di equazione cartesiana $x + 2 = 0$. *Nelle coordinate polari* (ρ,θ)*, d è rappresentata dall'equazione* $\rho\cos\theta + 2 = 0$.
L'ellisse di fuoco O, direttrice d ed eccentricità 1/4 *è il luogo dei punti per cui vale l'eguaglianza*

$$\frac{\rho}{\rho\cos\theta + 2} = \frac{1}{4}, \quad \textit{ossia } 4\rho = \rho\cos\theta + 2 \cdot$$

Esprimendo ρ *in funzione di* θ *si ricava l'equazione*

$$\rho = \frac{2}{4 - \cos\theta} \cdot$$