Commenti ad alcuni degli esercizi proposti
18. **Quadriche e loro sezioni piane**.

L'esercizio 4.

Scrivere un'equazione che rappresenti la sfera che è tangente al piano $x+y+z=3$ nel punto (2,1,0) e passa per il punto (4,5,2).

Il centro della sfera appartiene alla retta p che è perpendicolare al piano tangente nel punto di contatto, ed ha equazioni parametriche

$$x=2+t, y=1+t, z=t.$$

Inoltre il centro è equidistante dai due punti dati:

$$(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=(x-4)^2+(y-5)^2+(z-2)^2.$$

La seconda condizione è l'equazione del piano assiale dei due punti

$$-4x-8y-4z+40=0, \text{ cioè } x+2y+z-10=0.$$

Il centro è dunque l'intersezione di questo piano con la retta p; è determinato dal valore di t per cui

$$2+t+2(1+t)+t-10=4t-6=0$$

E' il punto di coordinate $(7/2, 5/2, 3/2)$. *Il raggio è la distanza tra* $(7/2, 5/2, 3/2)$. *e* (2,1,0), *cioè* $3\sqrt{3}/2$ *; un'equazione della sfera è*

$$(x-\frac{7}{2})^2+(y-\frac{5}{2})^2+(z-\frac{3}{2})^2=\frac{27}{4}.$$

L'esercizio 5.

Scrivere un'equazione che rappresenti la sfera che ha il centro nel punto (2,1,−3) ed è tangente al piano $2x+y-z=0$.

Il raggio di una sfera è uguale alla distanza del centro da un piano tangente, quindi in questo caso il raggio è $\left|\frac{4+1+3}{\sqrt{6}}\right|=\frac{8}{\sqrt{6}}$. *Un'equazione della sfera è* $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=\frac{32}{3}$.

L'esercizio 7.

Scrivere un'equazione della sfera che ha i punti (1,1,−1) e (1,−2,1) come estremi di un diametro. Trovare il centro ed il raggio della circonferenza che è la sezione di questa sfera con il piano di equazione $x = z$ e rappresentare questa circonferenza con equazioni cartesiane.

Il centro di una sfera è il punto medio tra gli estremi di un diametro, quindi la sfera assegnata ha come centro il punto (1,−1/2,0) ; *il raggio è* $\sqrt{13}/2$; *quindi un'equazione della sfera è* $(x-1)^2+(y+\frac{1}{2})^2+z^2=\frac{13}{4}$.

Il centro della circonferenza che è tagliata su questa sfera dal piano x = z sta sulla perpendicolare al piano condotta per il centro della sfera, ovvero è il punto di intersezione di questo piano con la retta per (1,−1/2,0) *e con parametri direttori* (1,0,−1)

$$x=1+t, y=-1/2, z=-t.$$

L'intersezione si ha per quel t per il quale è

$$1+t=-t, \text{ cioè } t=-1/2.$$

Il centro della circonferenza è il punto (1/2,−1/2,1/2); *la sua distanza dal centro della sfera è* $\sqrt{2}/2$. *Per il teorema di Pitagora, applicato ad un triangolo che abbia come vertici il centro della sfera, il centro della circonferenza ed un punto della circonferenza, il raggio r della circonferenza è tale che sia* $r^2=\frac{13}{4}-\frac{1}{2}=\frac{11}{4}$.

Delle equazioni cartesiane della circonferenza sono: $\begin{cases}(x-1)^2+(y+\frac{1}{2})^2+z^2=\frac{13}{4} \\ x-z=0.\end{cases}$.

L'esercizio 9.

Scrivere un'equazione cartesiana e delle equazioni parametriche per il cilindro con le generatrici parallele all'asse delle x che taglia sul piano $x = 0$ l'ellisse di equazioni

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 + 4z^2 - 64 = 0. \end{cases}$$

Riscrivendo le equazioni dell'ellisse nella forma $\begin{cases} x = 0 \\ \frac{y^2}{64} + \frac{z^2}{16} = 1 \end{cases}$ *si vede che l'ellisse può essere rappresentata dalle equazioni parametriche* $x = 0, y = 8\cos t, z = 4\sin t$. *Le rette che passano per i punti dell'ellisse e sono parallele all'asse delle x (le generatrici del cilindro) hanno equazioni parametriche, nei parametri t, s,*

$$(C) \quad \begin{cases} x = s \\ y = 8\cos t \\ z = 4\sin t \end{cases}.$$

Le (C) sono le equazioni parametriche del cilindro; una sua equazione cartesiana è $\frac{y^2}{64} + \frac{z^2}{16} = 1$.

L'esercizio 10.

Rappresentare in forma parametrica le rette che congiungono l'origine delle coordinate con i punti della parabola Ᵽ di equazioni $\begin{cases} z = 1 \\ y = x^2 \end{cases}$; ricavare dalle equazioni parametriche un'equazione cartesiana del cono con vertice nell'origine che contiene la parabola Ᵽ. Determinare il tipo delle intersezioni del cono con i piani x = costante.

I punti della parabola si possono rappresentare, in funzione di un parametro λ, *con le equazioni parametriche* $x = \lambda, y = \lambda^2, z = 1$. *Per ciascuno di questi punti, la retta che lo congiunge con l'origine ha equazioni parametriche, nel parametro t*

$$(*) \quad \begin{cases} x = t\lambda \\ y = t\lambda^2 \\ z = t \end{cases}.$$

Al variare dei parametri reali t, λ, *le* (*) *danno le coordinate di tutti i punti del cono, quindi sono le equazioni parametriche richieste. Per ottenere da queste un'equazione cartesiana del cono, eliminiamo i parametri : da*

$$\begin{cases} x = z\lambda \\ y = z\lambda^2 \end{cases} \quad \textit{ricaviamo} \quad \frac{y}{z} = \frac{x^2}{z^2}$$

e infine

$$x^2 - yz = 0.$$

Le intersezioni del cono con i piani $x = k$ *sono le curve di equazioni cartesiane* $\begin{cases} x = k \\ yz = k^2 \end{cases}$.

Sono tutte iperboli equilatere, tra loro isometriche. Per k fissato, il centro dell'iperbole è $(k,0,0)$; *gli asintoti sono le rette* $\begin{cases} x = k \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = k \\ z = 0 \end{cases}$, *l'asse traverso è* $\begin{cases} x = k \\ y = z \end{cases}$.

L'esercizio 15.

Studiare le sezioni con piani paralleli ai piani coordinati di ciascuna delle quadriche di equazioni

$$\text{a) } x^2 + y^2 - z^2 = 1; \quad \text{b) } x^2 - 4y^2 - z^2 = 1; \quad \text{c) } xy = z; \quad \text{d) } x^2 + 4z^2 = 2y.$$

Dedurne se si tratta di ellissoide, iperboloide a una o due falde, paraboloide ellittico o a sella.

a) Poiché se si sostituisce il valore di una variabile con il suo opposto l'equazione a) non cambia, la quadrica corrispondente è una superficie simmetrica sia rispetto ai piani coordinati sia rispetto all'origine delle coordinate; si tratta dunque di una quadrica a centro.
Secando la quadrica con i piani paralleli agli assi delle x e delle y si ottengono le coniche di equazioni cartesiane $\begin{cases} z = k \\ x^2 + y^2 = 1 + k^2 \end{cases}$; *sono tutte circonferenze, con centro* $(0,0,k)$, *raggio maggiore o uguale a* 1, *crescente al crescere di* $|k|$.

Le sezioni con i piani paralleli agli assi delle y e delle z sono le coniche di equazioni $\begin{cases} x = h \\ y^2 - z^2 = 1 - h^2 \end{cases}$*, iperboli equilatere, con centri* $(h,0,0)$*, assi di simmetria* $\begin{cases} x = h \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = h \\ z = 0 \end{cases}$*, paralleli agli assi coordinati.*

Le sezioni con i piani paralleli agli assi delle z e delle x hanno le equazioni cartesiane $\begin{cases} y = l \\ x^2 - z^2 = 1 - l^2 \end{cases}$*. Anche queste sono iperboli equilatere, con centri sull'asse delle y, assi di simmetria paralleli agli altri assi coordinati.*
Se la quadrica fosse un ellissoide o fosse un iperboloide a due falde, ci sarebbero piani, paralleli ai suoi piani di simmetria, che non la intersecano in punti reali. Quindi la quadrica a) è un iperboloide ad una falda. Dall'esame delle sezioni risulta anche che si tratta di un iperboloide di rotazione attorno all'asse delle z.

b) Poiché nell'equazione compaiono soltanto i quadrati delle variabili e il termine noto, l'equazione rappresenta una superficie simmetrica rispetto ai piani coordinati e all'origine delle coordinate, quindi una quadrica a centro.
Secando la quadrica con i piani paralleli agli assi delle x e delle y si ottengono le coniche di equazioni cartesiane $\begin{cases} z = k \\ x^2 - 4y^2 = 1 + k^2 \end{cases}$*; sono tutte iperboli, con centro* $(0,0,k)$*, asse traverso* $\begin{cases} z = k \\ y = 0 \end{cases}$ *parallelo all'asse delle x, l'altro asse parallelo all'asse delle y.*
Le sezioni con i piani paralleli agli assi delle y e delle z sono le coniche di equazioni $\begin{cases} x = h \\ 4y^2 + z^2 = h^2 - 1 \end{cases}$*, che sono ellissi reali con centri* $(h,0,0)$ *per* $|h| > 1$*, si riducono ad un punto (il centro) per* $h = \pm 1$*, non hanno punti reali per* $-1 < h < 1$*. Le sezioni che sono ellissi hanno assi di simmetria* $\begin{cases} x = h \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = h \\ z = 0 \end{cases}$*, paralleli agli assi coordinati.*
Le sezioni con i piani paralleli agli assi delle z e delle x hanno le equazioni cartesiane $\begin{cases} y = l \\ x^2 - z^2 = 1 + 4l^2 \end{cases}$*. Sono iperboli equilatere, con centri sull'asse delle y, asse traverso parallelo all'asse delle x, l'altro asse parallelo all'asse delle z.*
In conclusione, si tratta di un iperboloide a due falde, situate nei semispazi $x > 1$, $x < -1$.

c) Secando la quadrica con i piani paralleli agli assi delle x e delle y si ottengono le coniche di equazioni cartesiane $\begin{cases} z = k \\ xy = k \end{cases}$*; sono tutte iperboli equilatere, con centro* $(0,0,k)$*, asintoti paralleli agli assi coordinati* $\begin{cases} x = 0 \\ z = k \end{cases}, \begin{cases} y = 0 \\ z = k \end{cases}$*; ciascuna di queste iperboli è simmetrica rispetto alle rette perpendicolari* $\begin{cases} z = k \\ x = \pm y \end{cases}$*, dunque la superficie è simmetrica rispetto ai piani* $x = \pm y$*. Si nota che per* $k > 0$ *l'asse traverso è* $\begin{cases} z = k \\ x = y \end{cases}$*, quindi i punti della superficie stanno dei due ottanti definiti da* $\begin{cases} z > 0 \\ xy > 0 \end{cases}$*, mentre per* $k < 0$ *l'asse traverso è* $\begin{cases} z = k \\ x = -y \end{cases}$*, e la superficie si trova nei due ottanti* $\begin{cases} z < 0 \\ xy < 0 \end{cases}$.
Le sezioni con i piani paralleli agli assi delle y e delle z sono le rette di equazioni $\begin{cases} x = h \\ hy = z \end{cases}$*; le sezioni con i piani paralleli agli assi delle z e delle x sono le rette* $\begin{cases} y = l \\ lx = z \end{cases}$*; si tratta dunque di una quadrica rigata, che, in base allo studio delle sezioni con i piani z = k, è un paraboloide a sella.*

d) I piani del tipo y = c intersecano la quadrica in ellissi reali soltanto per c non negativo; quindi si tratta di una quadrica contenuta in un semispazio: è un paraboloide ellittico. Le sezioni con i piani x = a, oppure z = h sono parabole.