Commenti ad alcuni degli esercizi proposti.

2. Equazioni parametriche di rette e di piani

Le risposte alle domande dell'esercizio 1.

Nel piano, è assegnato un sistema di coordinate cartesiane (O,**i**,**j**). Sono dati i punti

$$A=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1/2\\3\end{pmatrix}.$$

a) Trovare le componenti del vettore **a** applicato in O che è equivalente (equipollente) al vettore $\overrightarrow{AB}$.

Risposta: $\mathbf{a}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}$.

b) Scrivere delle equazioni parametriche della retta per O parallela alla retta AB.

Risposta: $x = t$, $y = 5t$, $t \in \mathbb{R}$.

c) Trovare delle equazioni parametriche per la retta $A\ B$.

Risposta: $x = -1 + t$, $y = 4 + 5t$, $t \in \mathbb{R}$.

d) E' vero o falso che A, B, C sono allineati?

Il vettore equipollente ad $\overrightarrow{AC}$ *applicato nell'origine è* $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}3/2\\-1\end{pmatrix}$, *che non è multiplo di* **a,** quindi *i tre punti non sono allineati.*

e) Trovare delle equazioni parametriche e un'equazione cartesiana per la retta che passa per A ed è parallela al vettore **i** .

Equazioni parametriche: $x = -1 + t$, $y = 4$, per $t \in \mathbb{R}$; *equazione cartesiana:* $y = 4$.

L'esercizio 4.

Scrivere delle equazioni parametriche per: a) l'asse delle x (prima coordinata); b) la retta parallela all'asse delle z (terza coordinata) che passa per il punto $U=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

a) *L'ambiente è lo spazio tridimensionale, quindi l'asse delle x ha equazioni parametriche* $x = t$, $y = 0$, $z = 0$, per $t \in \mathbb{R}$.

b) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, *per* $t \in \mathbb{R}$.

L'esercizio 6.

Rappresentare in forma vettoriale e con equazioni parametriche

il piano per l'origine determinato dai vettori $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \mathbf{v}=\begin{pmatrix}-2\\0\\5\end{pmatrix}$;

Risposta: $\overrightarrow{OP}=\lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{v},\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$; $\begin{cases}x=\lambda-2\mu\\y=\lambda\\z=2\lambda+5\mu\end{cases},\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

il piano per il punto $U=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ parallelo ai vettori $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \mathbf{v}=\begin{pmatrix}-2\\0\\5\end{pmatrix}$;

Risposta: $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OU}+\lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{v},\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$; $\begin{cases}x=1+\lambda-2\mu\\y=1+\lambda\\z=1+2\lambda+5\mu\end{cases},\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

il piano per i punti $U_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, U_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Risposta: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OU_1} + \lambda(\overrightarrow{OU_2} - \overrightarrow{OU_1}) + \mu(\overrightarrow{OU_3} - \overrightarrow{OU_1}),\ \ \lambda,\mu \in \mathbb{R};\ \ \begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases},\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}.$

L'esercizio 8.

Verificare (esaminando vettori opportuni) che i punti $L = \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix}2\\7\\1\end{pmatrix}$ sono complanari e scrivere delle equazioni parametriche del piano che li contiene.

Consideriamo i vettori applicati nell'origine che sono equivalenti ai vettori, applicati in L, che hanno come secondo estremo uno degli altri punti:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix}4\\6\\-1\end{pmatrix}.$$

Se non ci si accorge subito che **w** *si scrive come combinazione lineare di* **u, v** (con coefficienti 1 e –7), *si ricorre alla definizione: i tre vettori sono linearmente dipendenti se l'equazione*

$$(*)\qquad \lambda\,\mathbf{u} + \mu\,\mathbf{v} + \upsilon\,\mathbf{w} = \mathbf{0}$$

ha soluzioni $(\lambda,\mu,\upsilon) \neq (0,0,0)$. *L'equazione vettoriale* (*) *equivale al sistema lineare omogeneo*

$$\begin{cases} 4\lambda + 4\nu = 0 \\ -\lambda - \mu + 6\nu = 0 \\ -\lambda - \nu = 0 \end{cases}$$

in cui la prima e la terza equazione sono equivalenti; il sistema ha le infinite soluzioni $(t,-7t,-t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Il piano che contiene i 4 punti si ottiene traslando in L il sottospazio vettoriale generato dai vettori **u,v.** *Si può quindi rappresentare con le equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 1 - t - s, \quad t,s \in \mathbb{R}. \\ z = 2 - t \end{cases}$$

3. Eliminazione di Gauss.

L'esercizio 4.

Studiare, al variare del coefficiente *k* in $\mathbb{R}$, i sistemi lineari che seguono e, per quei valori di *k* per cui è possibile, determinarne le soluzioni:

$$\text{a)} \begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ x - y + z = 2 \\ -x + ky + z = 0 \end{cases};\ \text{b)} \begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ x - y + z = 2 \\ -x + ky + z = -2 \end{cases};\ \text{c)} \begin{cases} x - y = k \\ 3x + 2y = 1 \\ 2x - ky = 4 \end{cases};\ \text{d)} \begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + y = 2 \\ -x + ky = -2 \end{cases}.$$

La matrice dei coefficienti è la stessa nei due casi a) e b); facciamo la riduzione a scalini per i due sistemi insieme:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & k & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & k+1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2+3(k+1) & 4 & 0 \end{array}\right).$$

L'ultima equazione dei sistemi ridotti a scalini ha il coefficiente dell'incognita uguale a 1 + 3*k. Se questo coefficiente è diverso da* 0, *entrambi i sistemi sono compatibili ed hanno una sola soluzione; precisamente,*

se è *k* ≠ –1/3,

- il sistema a) ha la soluzione $\left(2+\frac{2}{3k+1},\frac{6}{3k+1},\frac{4}{3k+1}\right)$,
- il sistema b) ha la soluzione (2,0,0).

Per $k = -1/3$

- il sistema a) è incompatibile: l'ultima equazione del sistema a scalini è $0z = 4$.
- Il sistema b) invece è compatibile, perché l'ultima equazione è $0z = 0$, ed è soddisfatta per ogni valore di z. Per questo valore di k il sistema b) è equivalente al sistema $\begin{cases} x+y=2+2z \\ 2y=3z \end{cases}$, che possiede le infinite soluzioni (2 + t/2, 3t/2, t), al variare di t in $\mathbb{R}$.

Se il solutore conosce il teorema di Rouché-Capelli (che nel corso è stato dimostrato in tempi successivi a quelli in cui sono stati assegnati questi esercizi) può notare che

- *per $k \neq -1/3$, il rango della matrice dei sistemi a), b) è uguale a* 3, *e quindi uguale a quello della matrice completa; per il teorema di Rouché e Capelli, i sistemi sono compatibili;*
- *per $k = -1/3$, il rango della matrice dei coefficienti è uguale a* 2,
  - *nel caso a) il rango della matrice completa è* 3, *quindi il sistema è incompatibile*
  - *nel caso b) il rango della matrice completa è* 2, *perciò il sistema è compatibile ed ammette infinite soluzioni dipendenti da* 1 (cioè 3–2) *parametro.*

Nel caso del sistema c) $\begin{cases} x-y=k \\ 3x+2y=1 \\ 2x-ky=4 \end{cases}$, con la riduzione di Gauss si ottiene

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & k \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -k & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & k \\ 0 & 5 & 1-3k \\ 0 & -k+2 & 4-2k \end{array}\right) \xrightarrow{k\neq 2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & k \\ 0 & 5 & 1-3k \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & k \\ 0 & 5 & 1-3k \\ 0 & 0 & -9-3k \end{array}\right)$$

Nel caso in cui sia $k = 2$, il sistema c) è equivalente al sistema $\begin{cases} x-y=2 \\ 5y=-5 \end{cases}$, che ha la soluzione (1,–1).

Per gli altri casi, si nota che l'ultima equazione del sistema ridotto a scalini risulta incompatibile per $k \neq -3$.
Per $k = -3$, il sistema ha l'unica soluzione (–1,2).
Chi (più avanzato nello studio) sa calcolare il rango delle matrici, osserva che il rango della matrice incompleta è uguale a 2 per qualsiasi valore di k; *mentre il rango della matrice completa è maggiore di* 2 *per tutti i valori di* k diversi da 2,–3. *Per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è compatibile soltanto per* $k = 2,-3$.

Nel caso d) $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x+y=2 \\ -x+ky=-2 \end{cases}$, con la riduzione di Gauss si ottiene:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & k & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{scambio}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & k & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k+1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Il sistema risulta compatibile per ogni valore di k; la soluzione è (2,0).
L'interpretazione geometrica, nel piano cartesiano, spiega il risultato: le tre equazioni rappresentano rette che passano tutte per uno stesso punto, qualunque sia il valore del parametro k nella terza equazione; infatti la terza equazione rappresenta, al variare di k, tutte le rette del fascio di centro (2,0) fuorché la retta di equazione $y = 0$.