4. Spazi vettoriali, sottospazi. Matrici.

La maggior parte di questi esercizi non dovrebbe presentare difficoltà: si richiede soltanto di verificare se gli insiemi indicati soddisfacciano o gli assiomi di spazio vettoriale oppure le condizioni perché un sottoinsieme di uno spazio vettoriale sia un sottospazio.

L'esercizio 2.

Dimostrare, utilizzando soltanto la definizione di spazio vettoriale, che, in ogni spazio vettoriale **V** su $\mathbb{R}$, per qualunque vettore **v** si ha:

$$0\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}.$$

Seguendo il suggerimento (ricordare le proprietà della somma di vettori e del prodotto di vettori per scalari), prendiamo in considerazione l'assioma $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$ (a,b scalari) *e ricordiamo che, per ogni scalare* a, *è* $a + 0 = a$.
Quindi si ha:

- $(0 + a)\,\mathbf{v} = a\,\mathbf{v}$ per la proprietà dello scalare 0, e
- $(0 + a)\,\mathbf{v} = 0\mathbf{v} + a\mathbf{v}$ per la proprietà del prodotto per scalari.

Dalla proprietà transitiva dell'eguaglianza, segue che è

- $a\,\mathbf{v} = 0\mathbf{v} + a\mathbf{v}$.

Sommando ad ambo i membri il vettore opposto del vettore $a\mathbf{v}$ (per l'assioma di esistenza dell'opposto), *e utilizzando anche le proprietà commutativa e associativa della somma, ricaviamo*

- $-(a\mathbf{v}) + a\mathbf{v} = \mathbf{0} = 0\mathbf{v} + (a + [-(a\mathbf{v})]) = 0\mathbf{v} + \mathbf{0} = 0\mathbf{v},$

in definitiva

$\mathbf{0} = 0\mathbf{v}$

come volevamo dimostrare.
Usiamo questo risultato per dimostrare la seconda uguaglianza: da

- $0\mathbf{v} = (1 - 1)\mathbf{v} = 1\mathbf{v} + (-1)\mathbf{v}$

segue, per la prima dimostrazione, e per l'assioma sul prodotto per 1

- $\mathbf{0} = \mathbf{v} + (-1)\mathbf{v};$

sommando infine ad ambo i membri l'opposto di **v** *concludiamo che è*

- $-\mathbf{v} = \mathbf{0} + (-1)\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v}.$

L'esercizio 5.

Vero o falso? **A,B,C** sono matrici (tali che le operazioni indicate siano possibili)

a) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\,\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$
b) Se $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, allora $\mathbf{AC} = \mathbf{BC}$
c) Se $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, allora $\mathbf{AC} = \mathbf{CB}$
d) Se $\mathbf{AC} = \mathbf{BC}$ allora $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

E' vera solo la b); per altre relazioni (anche per l'esercizio seguente) si ricordi che il prodotto di matrici non è commutativo, e che non vale la legge di annullamento del prodotto, cioè che da $\mathbf{AC} - \mathbf{BC} = \mathbf{0}$ **non** *segue necessariamente che almeno una tra* $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ *e* **C** *sia la matrice* **0.** Per esempio:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'esercizio 8.

Ricordiamo che, date due funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si chiama "funzione somma" la funzione definita ponendo

$$f + g : x \to f(x) + g(x), \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

e "funzione prodotto per il numero $c \in \mathbb{R}$" la funzione definita da

$$cf : x \to cf(x)\,.$$

a. Verificare che l'insieme delle funzioni (da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$), con queste operazioni, è uno spazio vettoriale $\mathfrak{F}$ su $\mathbb{R}$,
b. Considerare le funzioni

$$f_1 : x \to x^2, \;\; f_2 : x \to 4x - 1, \;\; f_3 = f_1 \circ f_2, \;\; f_4 = f_2 \circ f_1, f_5 = f_1 \circ f_1.$$

Descrivere il sottospazio vettoriale da esse generato.

La parte a richiede delle verifiche.
Per la parte b, si ha

$$f_3 = f_1 \circ f_2 : x \to (4x-1)^2,\ \ f_4 : x \to 4x^2-1,\ f_5 : x \to x^4 .$$

Il sottospazio vettoriale generato dalle funzioni f_k, per k = 1, ...,5, è l'insieme di tutte le funzioni definite ponendo, al variare in $\mathbb{R}$ dei coefficienti a, b, c, d, e

$$x \to ax^2 + b(4x-1) + c(4x-1)^2 + d(4x^2-1) + ex^4 .$$

L'esercizio 10.

Stabilire se per qualche valore di α il sottoinsieme

$$\mathbf{V}_\alpha = \{(x_1,...,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = \alpha\}$$

sia un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$, e, nei casi in cui è uno spazio vettoriale, trovarne dei generatori.

Il vettore **0** *appartiene a ogni sottospazio vettoriale, quindi, affinché* $\mathbf{V}_\alpha$ *sia sottospazio, deve necessariamente essere* $\alpha = 0$. *Poiché la somma di due vettori che abbiano la prima componente uguale a* 0 *è un vettore con la prima componente uguale a* 0, *l'insieme*

$$\mathbf{V}_0 = \{(x_1,...,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 0\} = \{(0, x_2, x_3, x_4), x_i \in \mathbb{R} \text{ per } i = 2,3,4\}$$

è chiuso rispetto alla somma di vettori; analogamente, è chiuso rispetto al prodotto per scalari, quindi è un sottospazio vettoriale.
I vettori di $\mathbf{V}_0$ *possono essere espressi come combinazione lineare dei vettori fondamentali*

$$\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

cioè si ha

$$\mathbf{V}_0 = Span\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}.$$