Commenti ad alcuni degli esercizi proposti
5. Dipendenza lineare, basi e dimensione.

L'esercizio 2.

Stabilire se i vettori $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix},\mathbf{b}=\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix},\mathbf{c}=\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix},\mathbf{d}=\begin{pmatrix}3\\-3\\8\end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti; in caso contrario, estrarre da questa famiglia di vettori un sottoinsieme massimale di vettori linearmente indipendenti ed esprimere i restanti vettori come combinazione lineare di quelli.

Dobbiamo stabilire se esistono degli scalari $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, non tutti nulli, *per i quali si abbia*

$$\alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b} + \gamma\,\mathbf{c} + \delta\,\mathbf{d} = \mathbf{0},$$

cioè che soddisfacciano il sistema lineare omogeneo

$$(*)\quad \begin{cases}\alpha+2\beta+3\delta=0\\ 3\alpha+3\gamma-3\delta=0\\ 4\beta-2\gamma+8\delta=0\end{cases}.$$

La matrice dei coefficienti di questo sistema è la matrice di tipo (3,4) *che ha come colonne i vettori* **a, b, c, d.** *Con il procedimento di riduzione a scalini otteniamo*

$$\begin{pmatrix}1&2&0&3\\3&0&3&-3\\0&4&-2&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-6&3&-12\\0&4&-2&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-2&1&-4\\0&2&-1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-2&1&-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Il sistema (*) *è equivalente al sistema*

$$(**)\quad \begin{cases}\alpha+2\beta+3\delta=0\\ -2\beta+\gamma-4\delta=0\end{cases},\quad \text{cioè}\quad \begin{cases}\alpha+2\beta=-3\delta\\ 2\beta=\gamma-4\delta\end{cases}$$

che ha infinite soluzioni; dando valori a piacere a γ, δ *(presi come termini noti) si ricavano i valori di* α, β *che soddisfano il sistema* (**) *e* (*):

$$(***)\ (\alpha,\beta,\gamma,\delta)=(t-s,\frac{s}{2}-2t,s,t),\ s,t\in\mathbb{R}.$$

Possiamo concludere che i quattro vettori dati sono linearmente dipendenti. Se però si considerano soltanto le incognite α, β, *che nel sistema ridotto a scalini hanno come coefficienti i pivot, cioè se si fa la combinazione lineare soltanto dei vettori* **a, b,** *allora si ottiene il sistema (basta porre* $\delta=\gamma=0$ *in* (**)),

$$\begin{cases}\alpha+2\beta=0\\ 2\beta=0\end{cases},$$

che possiede soltanto la soluzione banale; quindi i vettori **a, b** *sono linearmente indipendenti.*
Per scrivere il vettore **c** *come combinazione lineare di* **a, b,** *bisogna determinare dei coefficienti* α, β *in modo che sia* $\mathbf{c} = \alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b}$; *non occorrono altri calcoli, perché basta risolvere il sistema che si ottiene ponendo in* (**) $\gamma=-1$, $\delta=0$; *da* (***) *si ricavano i valori* 1 *per* α, –1/2 *per* β. *Infatti, è proprio*

$$1\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}.$$

In modo analogo, si trova che è

$$-1\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\\8\end{pmatrix}.$$

L'esercizio 3.

Per i valori di k per cui è possibile, esprimere uno, tra i vettori $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}2\\2\\5\end{pmatrix},\mathbf{v}(k)=\begin{pmatrix}k\\1\\2\end{pmatrix},\mathbf{w}=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$, come combinazione lineare degli altri.

E' simile all'esercizio precedente, perché occorre preliminarmente stabilire se ci siano valori di k per cui i tre vettori siano linearmente dipendenti. Si trova, operando come sopra, che i tre vettori sono linearmente

dipendenti se è $k = 2$. *Poiché l'ordine in cui si considerano i vettori non ha importanza, conviene, per abbreviare i calcoli, fare la riduzione a scalini della matrice* (**u w v**(k)).
Si trova: **w = u – v**(2).

L'esercizio 6.

Nello spazio vettoriale reale $\mathfrak{F}$, delle funzioni reali definite su $\mathbb{R}$, considerare le tre funzioni

$$e^x, e^{2x}, e^{3x}$$

e stabilire se sono linearmente indipendenti.
Il vettore **0** *dello spazio* $\mathfrak{F}$ *è la funzione identicamente nulla* η, che ad ogni numero reale x associa 0:

$$\text{per ogni } x,\ \eta(x) = 0.$$

Le tre funzioni date sono linearmente dipendenti se esistono degli scalari α, β, γ, *per cui la funzione* $\alpha e^x + \beta e^{2x} + \gamma e^{3x}$ *sia la funzione identicamente nulla. Deve essere quindi, per ogni scelta di x,*

$$\alpha e^x + \beta e^{2x} + \gamma e^{3x} = \eta(x) = 0.$$

In particolare, ponendo $x = 0, 1, 2$ *si ottengono tre equazioni lineari omogenee, che devono essere soddisfatte da* α, β, γ:

$$\begin{cases} \alpha e^0 + \beta e^0 + \gamma e^0 = \alpha + \beta + \gamma = \eta(0) = 0 \\ \alpha e + \beta e^2 + \gamma e^3 = e(\alpha + \beta e + \gamma e^2) = 0 \\ \alpha e^2 + \beta e^4 + \gamma e^6 = e^2(\alpha + \beta e^2 + \gamma e^4) = 0 \end{cases}.$$

Riduciamo a scalini la matrice dei coefficienti del sistema omogeneo (dividendo per fattori diversi da zero, dove occorre):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e & e^2 \\ 1 & e^2 & e^4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & e-1 & e^2-1 \\ 0 & e^2-1 & e^4-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & e+1 \\ 0 & 1 & e^2+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & e+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

concludiamo che il sistema omogeneo ha soltanto la soluzione banale: $\alpha = \beta = \gamma = 0$. *Le tre funzioni considerate sono linearmente indipendenti.*

L'esercizio 10.

Indichiamo con $P_4[x]$ l'insieme costituito da tutti i polinomi, a coefficienti reali, in una variabile x, di grado non superiore a 4. Dimostrare che il sottoinsieme W di $P_4[x]$ costituito da tutti i polinomi che hanno tra le loro radici il numero reale 3

$$W = \{ p(x) \in P_4[x] \mid p(3) = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale di $P_4[x]$, e trovarne la dimensione ed una base.

L'insieme W è costituito dai polinomi $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ *i cui coefficienti verificano l'equazione*

$$a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 + 81a_4 = 0.$$

Si può quindi scrivere ogni elemento di W nella forma

(§) $p(x) = -(3a_1 + 9a_2 + 27a_3 + 81a_4) + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 = a_1(x-3) + a_2(x^2-9) + a_3(x^3-27) + a_4(x^4-81)$.

W è perciò il sottospazio generato dai 4 polinomi

$$p_1 = x-3,\ p_2 = x^2-9,\ p_3 = x^3-27,\ p_4 = x^4-81.$$

Se i polinomi p_i (i = 1,..4) *sono linearmente indipendenti, allora costituiscono una base di W. Da* (§) *ricaviamo che per ottenere da una combinazione lineare dei polinomi* p_i *il polinomio* **0** *si devono prendere i coefficienti* a_i *in modo che sia*

$$\begin{cases} -(3a_1 + 9a_2 + 27a_3 + 81a_4) = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ a_4 = 0 \end{cases}.$$

I quattro polinomi p_i *sono, quindi, linearmente indipendenti; la dimensione del sottospazio W è* 4.