Commenti ad alcuni degli esercizi proposti
6. Intersezione e somma di sottospazi

A proposito dell'esercizio 1.

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sono assegnati i vettori

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Completare l'insieme **{u,v}** con vettori della base canonica in modo da ottenere una base di $\mathbb{R}^3$.

Basta verificare che la terna formata da **u, v,** *ed un vettore scelto tra quelli della base canonica è costituita di vettori linearmente indipendenti.*

L'esercizio 2

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono assegnati i vettori

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Si verifichi che il sottoinsieme

$$\mathbf{U} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_3 - x_4 = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale e se ne determini una base e la dimensione.

b) Dati i sottospazi

$$\mathbf{V} = \mathrm{Span}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}, \ \mathbf{W} = \mathrm{Span}\{\mathbf{e}_3\},$$

si trovi la dimensione ed una base per ciascuno dei sottospazi

$$\mathbf{U} \cap \mathbf{V}, \mathbf{U} + \mathbf{V}, \mathbf{U} \cap \mathbf{W}, \mathbf{U} + \mathbf{W}, \mathbf{V} \cap \mathbf{W}, \mathbf{V} + \mathbf{W}.$$

c) Per ciascuna delle eguaglianze che seguono, spiegare per quali ragioni sia vera o falsa:
   i) $\mathbb{R}^4 = \mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$
   ii) $\mathbb{R}^4 = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$
   iii) $\mathbb{R}^4 = \mathbf{W} \oplus \mathbf{V}$.

Per la parte a), si può osservare che se due quaterne di numeri reali, $(x_1,\ldots,x_4)$, $(x'_1,\ldots,x'_4)$ *appartengono ad* **U,** *cioè verificano entrambe la condizione che definisce* **U**

$$x_1 + 2x_3 - x_4 = 0, x'_1 + 2x'_3 - x'_4 = 0\ ,$$

allora è anche

$$(x_1 + x'_1) + 2(x_3 + x') - (x_4 + x'_4) = 0\ ,$$

quindi anche il vettore somma $(x_1+x'_1,\ldots,x_4+x'_4)$ *appartiene ad* **U.** *Analogamente, il prodotto di un elemento di* **U** *per uno scalare è ancora un vettore di* **U.**

Ogni vettore di **U** *può essere scritto nella forma*

$$\text{(A)} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 + 2x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Da (A) *segue che* **U** *è generato da tre vettori e che per ottenere il vettore* **0** *come combinazione lineare dei generatori di* **U** *occorre prendere tutti i coefficienti uguali a* 0; *quindi i tre generatori formano una base, e la dimensione di* **U** *è uguale a* 3.

Per la prima richiesta della parte b), si può osservare che un vettore α **a** + β **b** + γ **c** (*appartenente a* **V**) *è anche un vettore di* **U** *se è*

$$(\alpha - 2\gamma) + 2(0) - (-\beta - \gamma) = 0, \text{ cioè } \alpha + \beta = \gamma\ .$$

Lo spazio **U∩V** *è quindi costituito dei vettori*

$$\alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b} + (\alpha + \beta)\,\mathbf{c} = \alpha\,(\mathbf{a} + \mathbf{c}) + \beta\,(\mathbf{b} + \mathbf{c});$$

poiché i vettori **a + c**, **b + c** *non sono proporzionali tra loro, la dimensione di* **U∩V** *è uguale a* 2. *Dalla formula di Grassmann si ricava che la dimensione dello spazio* **U + V** *è uguale a* 3 + 3 – 2 = 4; *quindi* **U + V =** $\mathbb{R}^4$.

Anche nello svolgere le altre parti dell'esercizio può essere conveniente ricorrere alla formula di Grassmann per evitare inutili lungaggini.

L'esercizio 3

Nello spazio $\mathbb{R}^2$ si consideri il sottospazio **S** generato dal vettore $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Trovare due sottospazi diversi **T, T'** che siano supplementari di **S** (cioè tali che sia $\mathbb{R}^2 = \mathbf{S} \oplus \mathbf{T} = \mathbf{S} \oplus \mathbf{T'}$).

Lo scopo dell'esercizio è ricordare che per ogni sottospazio proprio esistono infiniti spazi supplementari.

L'esercizio 5

In quali casi, dati due sottospazi **U, U'** di uno stesso spazio vettoriale **V**, l'insieme $\mathbf{U} \cup \mathbf{U'}$ è un sottospazio vettoriale di **V**? Mostrare almeno un esempio.

Perché l'unione (nel senso della teoria degli insiemi) di due sottospazi vettoriali sia un sottospazio, è necessario che l'operazione di somma sia "interna" all'unione stessa: quindi uno dei due sottospazi deve essere contenuto nell'altro. Per esempio, indicati come al solito con $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_4$ *i vettori della base standard di* $\mathbb{R}^4$*, questo accade se consideriamo* $\mathbf{U} = \mathrm{Span}\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$, $\mathbf{U'} = \mathrm{Span}\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$.

L'esercizio 6

Vero o falso? Se **U, U'** sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$ e $dim(\mathbf{U}) = 2$, $dim(\mathbf{U'}) = 3$, allora è $\mathbb{R}^5 = \mathbf{U} \oplus \mathbf{U'}$. Motivare la risposta.

L'esercizio vuole ricordare che la relazione $dim(\mathbf{U}) + dim(\mathbf{U'}) = dim\ \mathbf{V}$ *è una condizione necessaria perché sia* $\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{U'}$ *ma non è sufficiente; per dimostrare la falsità dell'enunciato, basta un controesempio: si possono considerare due sottospazi generati da vettori della base standard di* $\mathbb{R}^5$

$$\mathbf{U} = \mathrm{Span}\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\},\ \mathbf{U'} = \mathrm{Span}\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}.$$

L'esercizio 7

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_2[x]$ dei polinomi, a coefficienti reali, in una variabile x, di grado non superiore a 2, si considerino i sottoinsiemi:

$$N = \{ p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(0) = 0\},\ M = \{ p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(0) \neq 0\}.$$

a) Stabilire se sia $\mathbb{R}_2[x] = N \oplus M$.
b) Trovare un sottospazio N' supplementare di N.

La risposta ad a) è negativa, perché M non è un sottospazio vettoriale, in quanto non contiene il polinomio **0;** *è* soltanto *il sottoinsieme complementare di N, nel senso della teoria degli insiemi.*

Per rispondere a b), si può osservare che N risulta generato dai polinomi x e x^2; quindi *un sottospazio complementare di N deve generato da un (solo) polinomio con termine di grado* 0 *non nullo; si può prendere in particolare il sottospazio dei polinomi di grado* 0, *che è isomorfo a* $\mathbb{R}$.