Commenti ad alcuni degli esercizi proposti
7. Applicazioni lineari

A proposito dell'esercizio 1.

Per ciascuna delle applicazioni che seguono, stabilire se è lineare, se è surgettiva, se è iniettiva, e trovare l'immagine del vettore **0**:

a. $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 \\ x \end{pmatrix}$

b. $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x+3y$

c. $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = 3x + 1$

d. $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = kx$, per k fissato in $\mathbb{R}$

e. $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2$

f. $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ z \end{pmatrix}$

g. $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}$

h. $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

i. $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Verificando se sono soddisfatte le condizioni che definiscono le applicazioni lineari, si vede che le applicazioni a, c non sono lineari; si noti che in entrambi i casi il vettore **0** ***non*** *è applicato sul vettore* **0**. *Anche le applicazioni* e, g non *sono lineari,* ***ma*** *entrambe mandano il vettore* **0** ***in*** **0.**

Le risposte all'esercizio 2

> Per quelle tra le applicazioni dell'esercizio 1 che sono lineari, determinare i sottospazi Nucleo (Ker F) e Immagine (Im F).

sono conferme dei risultati ottenuti svolgendo l'esercizio 1, per quelle applicazioni che sono lineari.

Per l'applicazione b, il Nucleo è il sottospazio $Span\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\}$; per il teorema fondamentale sulle dimensioni del nucleo e dell'Immagine, *l'Immagine ha dimensione uguale a* 1, perciò coincide con $\mathbb{R}$*; l'applicazione è quindi surgettiva e non iniettiva.*

L'applicazione d, se è $k \neq 0$, *ha come Nucleo il solo vettore* **0,** *quindi è iniettiva e surgettiva*; *per* $k = 0$ *è l'applicazione nulla.*

L'applicazione f ha come Nucleo il sottospazio generato dal vettore $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$*; per il teorema fondamentale, l'Immagine ha dimensione uguale a* 2, *quindi l'applicazione è surgettiva e non iniettiva.*

L'applicazione h ha come Nucleo il solo vettore **0,** quindi *è iniettiva e surgettiva.*

Il Nucleo dell'applicazione i è il sottospazio vettoriale generato dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, *quindi non è iniettiva né surgettiva; lo spazio Immagine, generato dalle immagini dei vettori della base standard,* è *uguale a* Span{$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$}.

L'esercizio 3.

Stabilire se per qualche valore del parametro *h* l'applicazione *F*. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + h(h-1) \\ hx^2 + y + h \end{pmatrix}$ è lineare e, per quei valori, trovarne il Nucleo, l'Immagine, e la matrice associata rispetto alla base canonica.

Deve essere $h=0$; *il Nucleo è formato dal solo vettore* **0,** *quindi l'applicazione è bigettiva. La matrice associata alla base canonica è* $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

L'esercizio 5.

Trovare, se possibile, le controimmagini dei vettori $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nell'applicazione lineare L_G: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ associata alla matrice $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

L'esercizio richiede di stabilire se siano risolubili i sistemi lineari (di tre equazioni in due incognite)

$$\mathbf{GX = u, GX = v}$$

e, in caso positivo, di trovarne le soluzioni.

Soltanto il primo dei due sistemi è compatibile; si trova $\mathbf{u} = L_G\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.