Commenti ad alcuni degli esercizi proposti
8. Rango di una matrice, teorema di Rouché-Capelli.

L'esercizio 1.

Sia F: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ -x+2y+z \\ 3y+z \end{pmatrix}$. Trovare:

a. la matrice associata ad F rispetto alla base canonica,
b. una base e la dimensione del sottospazio Ker F,
c. se esistono, le controimmagini dei vettori $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a. La matrice associata a F rispetto alla base canonica ha come colonne le componenti (rispetto alla base canonica) dei vettori che sono le immagini dei vettori della base:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

b. Il sottospazio Ker$F$ *è costituito dai vettori che sono le soluzioni del sistema lineare omogeneo* $\mathbf{F}\mathrm{X} = \mathbf{0}$. *Con il metodo di Gauss riduciamo la matrice in una forma a scalini:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ottenendo il sistema, equivalente al primo sistema $\mathbf{F}\mathrm{X} = \mathbf{0}$

$\begin{cases} x+y=0 \\ 3y+z=0 \end{cases}$, *o, isolando le incognite che hanno come coefficienti i pivot,* $\begin{cases} x=-y \\ y=-z/3 \end{cases}$.

Ker F *è costituito dei vettori le cui componenti sono date da* $\begin{pmatrix} t/3 \\ -t/3 \\ t \end{pmatrix}$, *al variare di t in* $\mathbb{R}$. *Una base di* Ker F *è* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$; *la dimensione di* Ker F *è uguale a* 1.

c. Poiché abbiamo trovato che la dim(Ker F) *vale* 1, *dal teorema fondamentale ricaviamo che è dim*(Im F) = 2; *perciò, F non è surgettiva. Non tutti i vettori di* $\mathbb{R}^3$ *hanno controimmagine, come nel caso di* $\mathbf{e}_3$, *che risulta essere linearmente indipendente dai vettori colonna della matrice* **F,** *perché il rango della matrice* **F** *è minore del rango della matrice che si ottiene orlando* **F** *con* $\mathbf{e}_3$.

Invece, **h** *ammette controimmagini, perché si ha*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

essendo il rango della matrice orlata uguale al rango di **F** *(cioè uguale a* 2), **h** *appartiene al sottospazio generato dalle colonne della matrice* **F.** *Le controimmagini di* **h** *sono le soluzioni del sistema lineare* $\begin{cases} x+y=2 \\ 3y+z=3 \end{cases}$, *cioè sono gli infiniti vettori* $\begin{pmatrix} 1+t/3 \\ 1-t/3 \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

L'esercizio 3.

Utilizzando il teorema di Rouché-Capelli, stabilire se esistono valori del parametro t per cui siano compatibili i sistemi lineari

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} t \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ t \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

Nei casi di sistemi compatibili, trovarne tutte le soluzioni.

Per il primo sistema, una riduzione a scalini della matrice completa è

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 3 & t\\ 2 & 2 & 3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1 & 3 & t\\ 0 & -4 & 3-2t\end{array}\right).$$

Il rango della matrice incompleta è uguale a 2, *quello della matrice completa non può essere maggiore, quindi il sistema è compatibile per ogni valore di t. Per ciascun t, la soluzione è* $\begin{pmatrix}\frac{9}{4}-\frac{t}{2}\\ -\frac{3}{4}+\frac{t}{2}\end{pmatrix}$.

Per il secondo sistema, si ha:

$$\left(\begin{array}{cc|c}2 & -1 & 3\\ 3 & -3/2 & t\end{array}\right)\xrightarrow{(2/3)II}\left(\begin{array}{cc|c}2 & -1 & 3\\ 2 & -1 & 2t/3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}2 & -1 & 3\\ 0 & 0 & \frac{2t}{3}-3\end{array}\right).$$

Il rango della matrice completa è 1, *come quello della matrice incompleta, per t* = 9/2. *Il sistema è compatibile soltanto per t* = 9/2 *ed ha infinite soluzioni, che si possono scrivere nella forma* $\begin{pmatrix}a\\ 2a-3\end{pmatrix}$, *con a numero reale.*

Il terzo caso è simile al secondo.

L'esercizio 5.

Determinare per quali valori del coefficiente λ sono compatibili i sistemi lineari

$$(a)\begin{pmatrix}4 & -2 & 2\\ 0 & 3 & \lambda\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\mathbf{X}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix};\quad (b)\begin{pmatrix}4 & -2 & 2\\ 0 & 3 & \lambda\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\mathbf{X}=\begin{pmatrix}0\\ 18\\ \lambda\end{pmatrix};\quad (c)\begin{cases}-x+2y=1\\ 3x+y=\lambda\\ x+y=2\end{cases};\quad (d)\begin{cases}x-y-6z=-3\\ x+2y+4z=1\\ x-y+2\lambda z=\lambda\\ \lambda x+\lambda y-2z=1\end{cases}.$$

e trovare quante e quali siano le soluzioni in ciascun caso di compatibilità.

Il sistema (a) è compatibile per ogni $\lambda\neq 3$, *e, fissato* λ *(diverso da* 3*), ha una sola soluzione (che, per comodità, scrivo in riga)* $\left(\frac{-1-2\lambda}{6-2\lambda},\frac{2-3\lambda}{6-2\lambda},\frac{7}{6-2\lambda}\right)$.
Anche il sistema (b) è compatibile per ogni $\lambda\neq 3$, *e, fissato* λ *(diverso da* 3*), ha una sola soluzione.*
Nel caso del sistema (c), il rango della matrice completa è 2 *per* $\lambda = 4$; *il sistema è compatibile soltanto per* $\lambda = 4$, *ed ha la soluzione* $\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.
Per il sistema (d) si trova

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -6 & -3\\ 1 & 2 & 4 & 1\\ 1 & -1 & 2\lambda & \lambda\\ \lambda & \lambda & -2 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -6 & -3\\ 0 & 3 & 10 & 4\\ 0 & 0 & 2\lambda+6 & \lambda+3\\ 0 & 2\lambda & -2-2\lambda^2 & 1-\lambda^2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -6 & -3\\ 0 & 3 & 10 & 4\\ 0 & 0 & 2(\lambda+3) & \lambda+3\\ 0 & 0 & -2-2\lambda^2-20\lambda/3 & 1-\lambda^2-8\lambda/3\end{array}\right)=.$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -6 & -3\\ 0 & 3 & 10 & 4\\ 0 & 0 & 2(\lambda+3) & \lambda+3\\ 0 & 0 & -2(\lambda+3)(\lambda+1/3) & -(\lambda+3)(\lambda-1/3)\end{array}\right)$$

<u>Se è $\lambda = -3$,</u> *il rango della matrice incompleta e quello della completa sono uguali a* 2; *il sistema è equivalente al sistema*

$$\begin{cases}x-y=-3+6z\\ 3y=4-10z\end{cases}\text{, che ha le infinite soluzioni }\begin{pmatrix}\frac{8t-5}{3}\\ \frac{4-10t}{3}\\ t\end{pmatrix}\text{, per t reale.}$$

<u>Se è $\lambda\neq -3$,</u> *la matrice completa del sistema (d) si può ridurre alla forma*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -6 & & -3 \\ 0 & 3 & 10 & & 4 \\ 0 & 0 & 2 & & 1 \\ 0 & 0 & -2(\lambda+1/3) & & -(\lambda-1/3) \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -6 & -3 \\ 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -(\lambda-1/3)+(\lambda+1/3) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -6 & -3 \\ 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 \end{array}\right).$$

La matrice incompleta ha rango uguale a 3, *la matrice completa ha rango uguale a* 4; *quindi il sistema è incompatibile per ogni valore di* λ *diverso da* -3.

L'esercizio 6.

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sono assegnati i due sottospazi

$$\mathbf{U} = Span\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right\}, \quad \mathbf{V} = Span\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Determinare i sottospazi **U⊕V, U∩V,** indicandone la dimensione ed una base.

Poiché si ha $\mathbf{U}\oplus\mathbf{V} = Span\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$, *occorre stabilire quanti e quali tra i quattro generatori dello spazio somma siano linearmente indipendenti. La matrice che ha come colonne i quattro generatori ha rango uguale a* 3:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che lo spazio somma **U⊕V** *coincide con lo spazio ambiente* $\mathbb{R}^3$**.** *Una base dello spazio somma è la famiglia costituita dai tre vettori* $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Dalla formula di Grassmann si ricava che la dimensione dello spazio intersezione **U∩V** *è uguale a* 1; *per trovarne un generatore, cerchiamo degli scalari* α, β *tali che esistano* γ, δ *per i quali sia*

$$\alpha\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Per comodità, poniamo $\gamma' = -\gamma$, $\delta' = -\delta$. *Per la riduzione a scalini considerata sopra, il sistema*

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + \delta' = 0 \\ 2\beta - \delta' = 0 \\ \alpha + \gamma' + \delta' = 0 \end{cases}$$

è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + \delta' = 0 \\ 2\beta - \delta' = 0 \\ 4\gamma' + \delta' = 0 \end{cases},$$

che ha soluzioni $(3\gamma', -2\gamma', \gamma', -4\gamma')$. *Una soluzione particolare, per esempio quella che si ottiene per* $\gamma' = 1$ *(quindi per* $\alpha = 3$, $\beta = -2$*), determina un generatore dello spazio intersezione; perciò, una base dello spazio* **U∩V** *è il vettore*

$$3\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-4\\3\end{pmatrix}.$$