Commenti ad alcuni degli esercizi proposti
9. Equazioni cartesiane di rette nel piano e nello spazio, di piani.

L'esercizio 1.

Nel piano sono assegnati i punti $L = (2,3)$, $M = (-1,1/2)$, $N(-2,2)$.

a. Controllare che essi non sono allineati,
b. scrivere un'equazione cartesiana della retta r che passa per L ed M,
c. scrivere delle equazioni parametriche e cartesiane della retta s che è parallela alla retta r e che passa per il punto N.

Un modo di controllare che i punti L,M,N non sono allineati è verificare che i vettori $\overrightarrow{LM}, \overrightarrow{LN}$ *non sono linearmente dipendenti; infatti, i vettori applicati nell'origine equipollenti (equivalenti) a* $\overrightarrow{LM}, \overrightarrow{LN}$ *sono*

$$\begin{pmatrix} -1-2 \\ \frac{1}{2}-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2-2 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

le cui componenti non sono in proporzione.

Un vettore direttore della retta che passa per L, M è $\begin{pmatrix} -3 \\ -5/2 \end{pmatrix}$*; delle equazioni parametriche di questa retta sono* $x = 2 - 3t$, $y = 3 - 5t/2$. *Eliminando il parametro t, si trova un'equazione cartesiana* $\frac{x-2}{3} = 2\frac{y-3}{5}$.

La retta parallela alla precedente e passante per N ha equazioni parametriche $x = -2 - 3t$, $y = 2 - 5t/2$; *una sua equazione cartesiana è* $5(x+2) - 6(y-2) = 0$.

Sull'esercizio 4.

Nel piano sono assegnate le rette r, di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 3-4t \\ y = -1+2t \end{cases}$, ed r', di equazione cartesiana $x + 6y + 2 = 0$. Stabilire se le due rette sono incidenti e, in caso affermativo, trovare il punto in cui si intersecano.

Il modo più semplice: esiste un valore di t per cui sia $(3-4t) + 6(-1+2t) + 2 = 0$? *Si trova:* $t = 1/8$, *il punto comune è* $(5/2,-3/4)$.

L'esercizio 6.

Scrivere un'equazione che rappresenti il fascio delle rette che passano per il punto $V = (-3,1)$; tra le rette di questo fascio determinare:

a. quella che è parallela alla retta di equazione $x + y = 463$
b. quella che è parallela all'asse delle y
c. quella che passa anche per il punto $(3,2)$.

Le rette del fascio sono rappresentate, per h, k non contemporaneamente nulli, dalle equazioni

$$h(x+3) + k(y-1) = 0.$$

Per $h = k = 1$ *si trova la risposta alla domanda a; per* $k = 0$ *si ha la risposta alla b. Per la domanda c, occorre che sia* $h\,6 + k\,1 = 0$, *quindi la terza retta ha equazione* $x + 3 - 6(y-1) = 0$.

L'esercizio 7.

Costruire un modello geometrico per risolvere il problema: *decidere quale, tra le seguenti offerte di un gestore di telefonia mobile, sia più conveniente per una persona che usa poco il telefono*:

a. schede prepagate, al costo delle chiamate di 24, 6 centesimi al minuto
b. contratto di abbonamento di 12 euro al mese, con costo delle chiamate di 16,2 cent/min.

Indicato con x il tempo in minuti, con y il costo in centesimi, nel caso a la relazione tra tempo e spesa mensile è

$$y = 24,6x.$$

Nel caso b, la relazione tra tempo e spesa mensile è

$$y = 16,2x + 1200.$$

I grafici delle due funzioni (preferibilmente in un sistema cartesiano con unità di misura diverse sui due assi) sono due rette, che si intersecano; esaminando la rappresentazione grafica si nota immediatamente che, per un uso limitato del telefono (inferiore a 143 *minuti al mese), conviene la tariffa a.*

Le risposte all'esercizio 8.

Rappresentare con equazioni parametriche e con una equazione cartesiana

a. il piano per l'origine determinato dai vettori $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \mathbf{v}=\begin{pmatrix}-2\\0\\5\end{pmatrix}$;

Risposta: $\begin{cases} x=\lambda-2\mu \\ y=\lambda \\ z=2\lambda+5\mu \end{cases}$, $5x-9y+2z=0$

b. il piano per il punto $U=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ parallelo ai vettori $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \mathbf{v}=\begin{pmatrix}-2\\0\\5\end{pmatrix}$;

Risposta: $\begin{cases} x=1+\lambda-2\mu \\ y=1+\lambda \\ z=1+2\lambda+5\mu \end{cases}$, $5x-9y+2z+2=0$

c. il piano per i punti $U_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, U_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, U_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Risposta: $\begin{cases} x=1+\lambda+\mu \\ y=-\lambda \\ z=-\mu \end{cases}$, $x+y+z=1$.

Le risposte all'esercizio 9.

Nello spazio, è assegnato il vettore $\mathbf{w}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}$ Trovare delle equazioni parametriche e delle equazioni cartesiane per

a. la retta parallela al vettore **w** e che passa per l'origine

Risposta: $\begin{cases} x=-t \\ y=2t \\ z=-2t \end{cases}$, $\begin{cases} 2x+y=0 \\ 2x-z=0 \end{cases}$

b. la retta parallela alla precedente che passa per $A=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$.

Risposta: $\begin{cases} x=1-t \\ y=-2+2t \\ z=3-2t \end{cases}$, $\begin{cases} 2x+y=0 \\ 2x-z=-1 \end{cases}$.

L'esercizio 13.

Verificare (esaminando vettori opportuni) che i punti $L=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}, M=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, N=\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix}2\\7\\1\end{pmatrix}$ sono complanari e scrivere un'equazione cartesiana che rappresenti il piano che li contiene.

Bisogna verificare che sono linearmente dipendenti i vettori, applicati nell'origine, equivalenti a $\overrightarrow{LM}, \overrightarrow{LN}, \overrightarrow{LP}$.

Infatti: $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + (-7)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Il piano per l'origine parallelo al piano LMN ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 4\lambda \\ y = -\lambda - \mu \\ z = -\lambda \end{cases}$, *ha equazione cartesiana*

$x + 4z = 0$; *un'equazione del piano LMN è* $x + 4z - 6 = 0$.

Commenti ad alcune domande dell'esercizio 14.

Scrivere delle equazioni cartesiane che rappresentino i piani determinati da ciascun insieme di condizioni:

a. essere parallelo all'asse delle y e alla retta di equazioni (nel parametro t) $x = 1 + t$, $y = 2t$, $z = 3t$ e passare per il punto $E = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

E' individuata la giacitura del piano (il piano parallelo passante per l'origine): è $Span\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$.

b. contenere la retta di equazioni parametriche (nel parametro t) $x = 1 + t$, $y = 2t$, $z = 3t$ ed il punto $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

In questo caso la giacitura può essere individuata da un vettore direttore della retta e, scelto un punto X sulla retta, da un vettore equivalente a $\overrightarrow{AX}$ *; la giacitura è quindi* $Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}$.

Anche le altre domande contengono informazioni sufficienti per determinare la giacitura del piano richiesto.
La risposta alla domanda

e. trovare il piano passare per il punto $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ed essere parallelo al piano dei due assi coordinati delle y e delle z

è

$$x = 2.$$