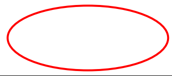
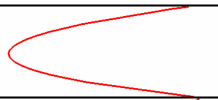
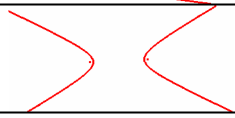
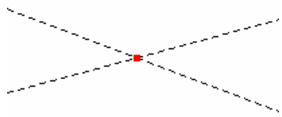
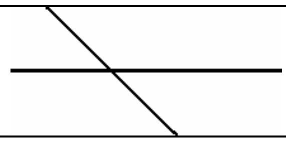
Il teorema di classificazione delle curve del secondo ordine

Poniamo $\mathbf{X}^T = (x,y)$. Un'equazione di secondo grado

$$\mathbf{X}^T\mathbf{A}_2\mathbf{X} + 2\mathbf{B}^T\mathbf{X} + c = 0, \text{ con } \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2{}^T, \text{ oppure}$$

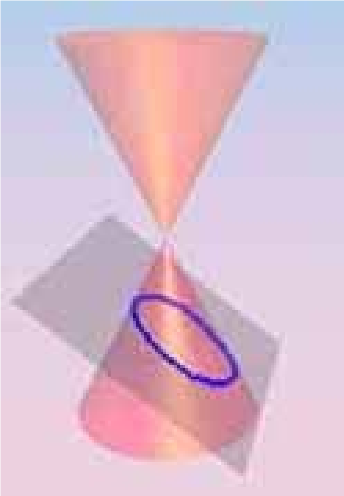
$$\begin{pmatrix}\mathbf{X}^T & 1\end{pmatrix}\mathbf{A}\begin{pmatrix}\mathbf{X} \\ 1\end{pmatrix} = 0, \text{ con } \mathbf{A} = \begin{pmatrix}\mathbf{A}_2 & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & c\end{pmatrix}$$

definisce un luogo di punti del piano euclideo che, a seconda del rango di **A** e, in dipendenza del segno del determinante di $\mathbf{A}_2$, è di uno tra i sette tipi elencati nella tabella:

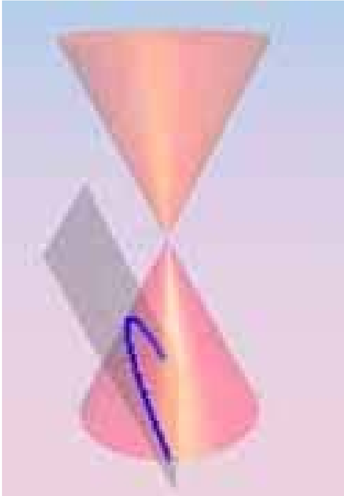
rango di A	***det*A₂**	**Nome**	**Equazione canonica**	**Forma**
3	> 0	Ellisse	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	
			$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$ ellisse immaginaria	Insieme vuoto
	= 0	Parabola	$y^2 = 2px$	
	< 0	Iperbole	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	
2	> 0	Punto	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ rette complesse coniugate, incidenti in (0,0)	
	= 0	Rette parallele	$y^2 = a^2$	
			$y^2 + a^2 = 0$ parallele immaginarie	Insieme vuoto
	< 0	Rette incidenti	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	
1	= 0	Retta doppia	$y^2 = 0$	

Le superfici del secondo ordine e loro sezioni piane.

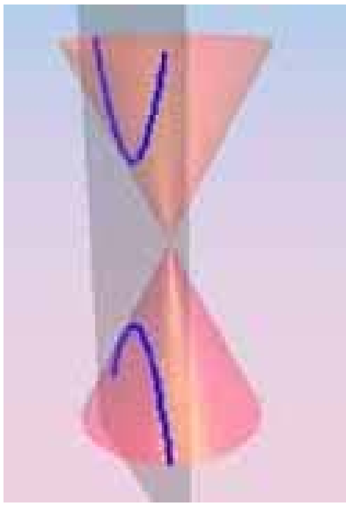
Tagliando con un piano un cono circolare (infinito) si ottengono *quasi* tutte le curve del secondo ordine (perciò dette anche "coniche"), come mostrano le immagini che seguono, tratte da http://math2.org/math/algebra/conics.htm



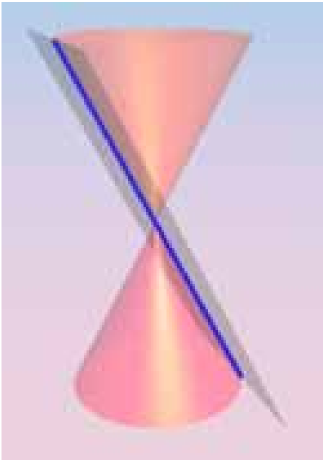
ellisse



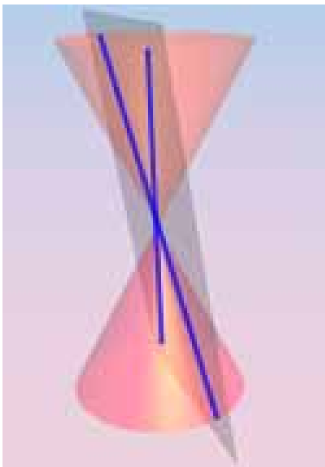
parabola



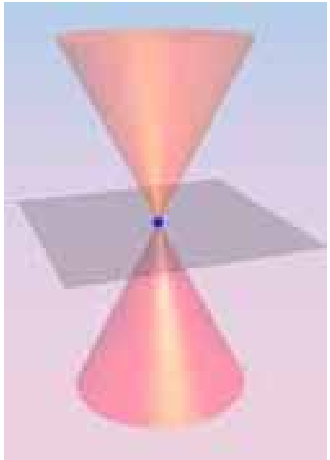
iperbole



una retta (doppia)



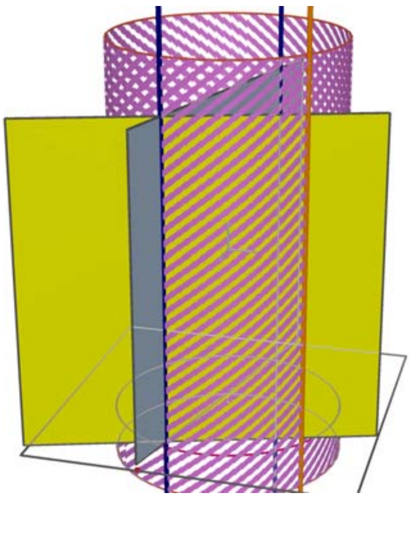
due rette



un punto

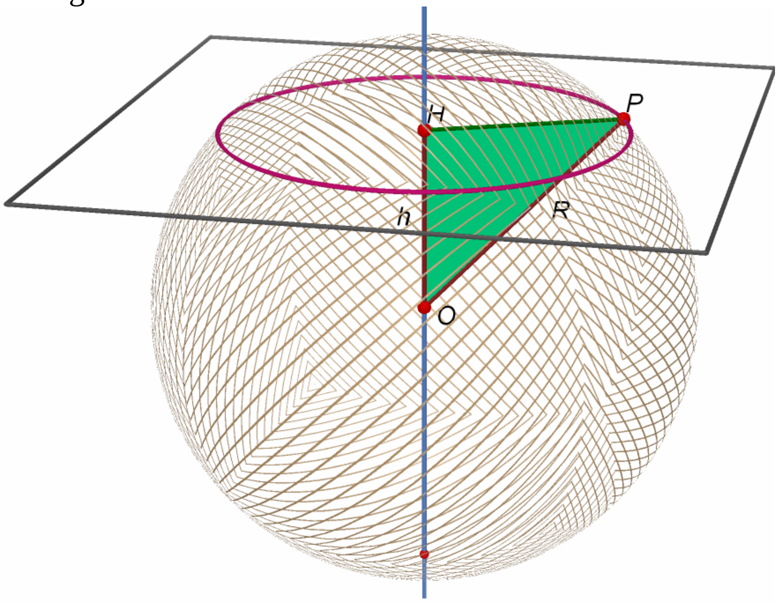
Tra le sezioni piane del cono non compare uno solo dei sette tipi elencati nella tabella precedente.

Quale superficie, tra quelle che ci sono note dalla scuola elementare, può avere una sezione piana formata da due rette parallele?



Certamente, tagliando con un piano una superficie sferica non si possono ottenere rette. Tra i piani che tagliano una superficie sferica, ci sono quelli che la incontrano soltanto in un punto (i piani tangenti), e altri che la incontrano in circonferenze. E non vi sono altre possibilità.

Infatti: dati un piano ed una sfera di centro *O* e di raggio *R*, consideriamo la perpendicolare condotta al piano da *O* e chiamiamo *h* la distanza del centro della sfera dal piano (cioè la distanza tra il centro della sfera e la sua proiezione ortogonale sul piano, indicata con *H* nella figura). Ogni punto *P* che appartiene contemporaneamente al piano e alla sfera determina, con *O* e con *H*, un triangolo rettangolo, con un cateto di lunghezza *h* e l'ipotenusa uguale a *R*, come illustrato dalla figura.



Quindi i punti comuni alla sfera e al piano descrivono una circonferenza, perché hanno, tutti, la stessa distanza dal punto *H*, precisamente la distanza *r* per cui si ha

$$R^2 - h^2 = r^2.$$

Quando è $h = R$, la circonferenza si riduce ad un punto. Il valore massimo di *r* si ha quando è $h = 0$: ragionevole quindi chiamare "*cerchi massimi*" di una sfera quelli che sono tagliati dai piani che passano per il suo centro.

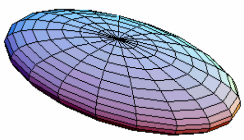
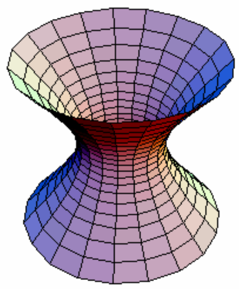
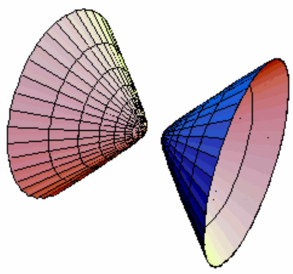
Non ostante che la forma sferica ci sia oltremodo familiare, non sempre riusciamo a riconoscerne delle porzioni, come nel caso delle "vele" del teatro dell'Opera di Sydney.

A forme geometriche meno familiari sono ispirati molti edifici, ad esempio il fumaiolo, fotografato da Elena Marchetti, qui riprodotto dall'articolo: Elena Marchetti e Luisa Rossi

Costa "*Mathematical elements in Historic and Contemporary Architecture*", NEXUS NETWORK JOURNAL – VOL. 8, NO. 2, 2006, pag. 79-96

Come la superficie sferica è rappresentata da una equazione di secondo grado nelle coordinate cartesiane *x y z*, così anche la superficie del fumaiolo ed altre, di cui incontriamo esempi nella vita quotidiana, hanno equazioni di secondo grado. Analogamente a quanto si fa per le curve, si possono classificare le superficie del secondo ordine (***quadriche***) in base a certi invarianti algebrici: si dimostra che i casi possibili sono in numero finito e, scegliendo convenientemente il sistema di riferimento, si ricavano le equazioni canoniche per ciascun caso.

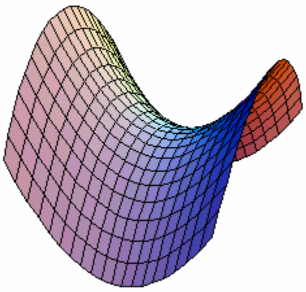
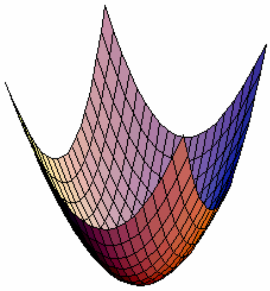
Le quadriche di tipo generale[1] (non specializzate) sono dotate di tre piani di simmetria, quindi di un centro di simmetria, e perciò sono chiamate ***quadriche a centro***. Prescindendo dall'ellissoide immaginario (di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0$) si hanno i tre tipi:

Ellissoide	**Iperboloide a una falda (iperbolico)**	**Iperboloide a due falde (ellittico)**
		
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

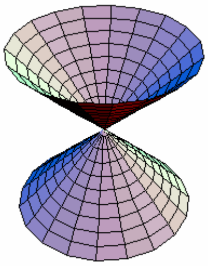
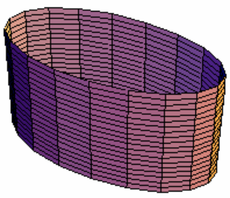
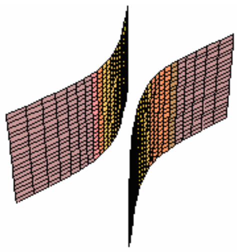
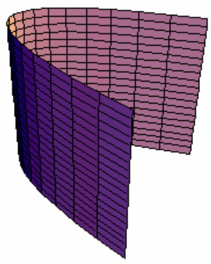
[1] Come per le coniche, la distinzione in "specializzate" e "non specializzate" dipende dal rango della matrice dei coefficienti dell'equazione di secondo grado.

I disegni mostrano soltanto una parte di ciascun iperboloide. Il fumaiolo della fotografia precedente è un pezzo di iperboloide iperbolico.

Le quadriche non specializzate che non hanno un centro di simmetria si chiamano ***paraboloidi***; hanno soltanto due piani di simmetria e sono di due tipi:

Paraboloide a sella (iperbolico)	**Paraboloide ellittico**
	
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$

Le quadriche **semplicemente specializzate** sono, prescindendo dal cono immaginario di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ (soddisfatta dalla sola origine delle coordinate), il ***cono* e i *cilindri:***

Cono	**Cilindro ellittico**	**Cilindro iperbolico**	**Cilindro parabolico**
			
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$y^2=2\,p\,x$

Le quadriche **doppiamente specializzate** sono costituite da coppie di piani:

due piani incidenti	**due piani paralleli,**	**due piani complessi coniugati**
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	$\frac{x^2}{a^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$

Si noti che l'equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ è soddisfatta da tutti e soli i punti di **una retta,** l'asse delle *z*.

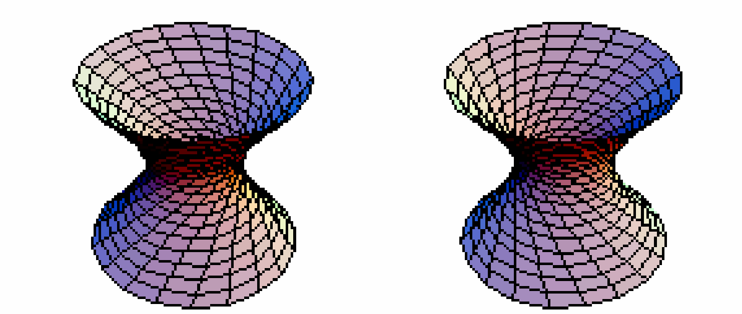
Infine, le **quadriche triplamente specializzate** sono coppie di piani coincidenti; in forma canonica

$$x^2 = 0.$$

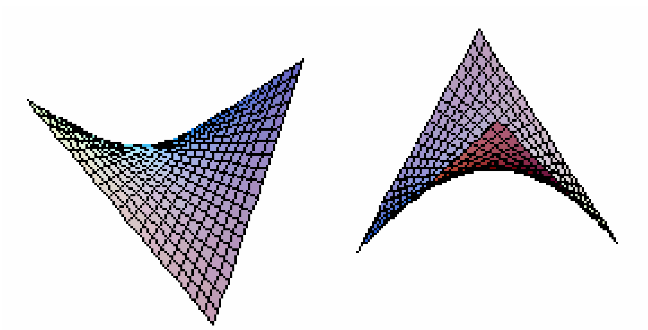
L'iperboloide ad una falda, il paraboloide a sella, il cono e i cilindri si possono ottenere come il luogo delle traiettorie descritte dai punti di una retta che si muove secondo una data legge: vengono perciò chiamate ***quadriche rigate***.

E' facile vederlo nel caso del cono: si sceglie un punto V fuori del piano di una conica $\mathcal{C}$, si congiunge V con un punto P di $\mathcal{C}$; al muoversi di P su $\mathcal{C}$, con V *fisso*, la retta VP descrive il cono. Se invece si impone alla retta di mantenere una direzione costante al variare di P su $\mathcal{C}$, si ottiene un cilindro. Il tipo del cilindro (ellittico, parabolico, iperbolico) dipende dal tipo di $\mathcal{C}$ (ellisse, parabola, iperbole).

Il paraboloide a sella e l'iperboloide a una falda godono inoltre della proprietà di contenere due diverse famiglie di rette, tali che per ogni punto della superficie passi una retta dell'una e una dell'altra famiglia.
Un modo di generare un iperboloide a una falda consiste nel fissare una corrispondenza biunivoca tra due coniche che giacciano in piani paralleli e costruire le rette che congiungono punti corrispondenti. Usando due volte questo metodo sono state tracciate, con il software Mathematica®, le figure qui sotto, in cui compaiono parti delle due famiglie di rette della stessa quadrica:



Per ottenere un paraboloide, si possono congiungere punti corrispondenti in una bigezione tra due rette sghembe. Ecco una parte di un paraboloide a sella, visto da due punti di vista diversi



Osserviamo che se un piano contiene una retta di una quadrica rigata, allora quel piano contiene una seconda retta della quadrica, perché taglia la quadrica in una conica, necessariamente specializzata.