Sul rango di una matrice.

In accordo con il testo di riferimento (Marco Abate e Chiara De Fabritiis, Geometria analitica con elementi di Algebra lineare, Milano, 2006, capitolo 5), chiamiamo **rango di una matrice A** la dimensione dello spazio vettoriale generato dalle colonne di **A,** cioé la dimensione dello spazio Immagine dell'applicazione $L_{\mathbf{A}}$ associata alla matrice.

Omettiamo le proposizioni 5.10, 5.11, 5.12 del testo; dimostriamo, indipendentemente dal testo, la parte della proposizione 5.11 in cui si stabilisce una notevole relazione tra il rango di una matrice e quello della sua trasposta, o, come spesso si dice per brevità, tra il rango per colonne e quello per righe di una matrice.

Teorema. *Sia* **A** *una matrice di tipo (m,n) e rango r. Allora r è anche la dimensione dello spazio vettoriale generato dalle righe di* **A,** *ovvero rango*(**A**) = *rango*($\mathbf{A}^T$)**.**

Dimostrazione. Abbiamo dimostrato (Abate - de Fabritiis, teor. 6.3) che la dimensione dello spazio generato dalle colonne di **A** coincide con la dimensione dello spazio generato dalle colonne di una sua riduzione a scalini **S,** e che questa dimensione è il numero dei pivot di **S.**
Il procedimento di riduzione a scalini è ottenuto operando sulle righe di **A,** con operazioni di tre tipi:

a) scambio di righe
b) moltiplicazione di una riga per uno scalare non nullo
c) sostituzione di una riga $\mathbf{a_i}$ con una somma $\mathbf{a_i} + k\mathbf{a_j}$ (k scalare diverso da 0).

Nessuna di queste operazioni influenza lo spazio vettoriale generato dalle righe; in particolare, si ha che Span($\mathbf{a_1},\ldots,\mathbf{a_i},\ldots,\mathbf{a_j},\ldots,\mathbf{a_m}$) = Span($\mathbf{a_1},\ldots,\mathbf{a_i} + k\mathbf{a_j},\ldots,\mathbf{a_j},\ldots,\mathbf{a_m}$).
Allora, indicate con $\mathbf{s_1},\ldots,\mathbf{s_m}$ le righe della matrice a scalini **S,** possiamo concludere che è

$$dim\,(\mathrm{Span}(\mathbf{a_1},\ldots,\mathbf{a_m})) = dim\,(\mathrm{Span}(\mathbf{s_1},\ldots,\mathbf{s_m})) = r\,.$$

C.v.d.