

Geometria lineare e affine (C. L. in Fisica) – Geometria analitica (C. L. in Matematica)

Prova scritta del 28 giugno '12

Scrivere nome e cognome in testa ad ogni foglio. Consegnare questo foglio.

La durata della prova è tre ore; è consentito tenere sul banco un solo foglio di appunti personali
Le risposte prive di spiegazioni non sono prese in considerazione, neppure se esatte.

Nome e cognome _____ n. matricola _____ corso di laurea _____

1. Nello spazio sono assegnati i punti $L = (1,2,1)$, $M = (3,2,4)$, $U = (1,1,1)$.
- Scrivere delle equazioni parametriche e delle equazioni cartesiane della retta a che contiene i punti L ed M .
 - Scrivere delle equazioni cartesiane della retta che passa per U ed è parallela alla retta a .
- (punti: 2 + 2)

2. Nello spazio, sono date le rette r , di equazioni $\begin{cases} x+y-2z=0 \\ 2x-y=3 \end{cases}$, s , di equazioni $x = y = z$, ed il punto $N = (0,0,7/4)$.
- Scrivere un'equazione cartesiana del piano per N che è parallelo a r e ad s .
 - Scrivere un'equazione cartesiana del piano per N che è perpendicolare alla retta r .
 - Utilizzare il risultato precedente per trovare la distanza di N dalla retta r .
- (punti: 3 + 1 + 2)

3. Nel piano, riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche Oxy , è assegnata una famiglia di coniche, definita dalle equazioni, dipendenti dal parametro reale k ,

$$\frac{(x-k)^2}{4} + \frac{(y-2k^2)^2}{k} = 1.$$

- Stabilire per quali valori di k la famiglia contenga ellissi, parabole, iperboli, non degeneri.
- Determinare la curva alla quale appartengono i centri delle coniche della famiglia, e studiare brevemente tale curva.
- Posto $k = 1$, trovare i vertici ed i fuochi della conica così individuata, tracciarne uno schizzo, e scriverne delle equazioni parametriche.
- Descrivere brevemente la quadrica che, nello spazio con riferimento cartesiano $Oxyz$, ha l'equazione $\frac{(x-1)^2}{4} + (y-2)^2 = 1$ e trovarne delle equazioni parametriche.

(punti: 1 + 2 + 4 + 2)

4. Per ciascuna delle affermazioni che seguono, spiegare per quali ragioni sia vera o sia falsa:
- Se \mathbf{A} è una matrice quadrata invertibile, anche le sue potenze $\mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3, \dots, \mathbf{A}^n$ (n naturale qualsiasi) sono invertibili.
 - Dati nello spazio ordinario tre vettori non complanari, $\mathbf{u} = \overline{OA}, \mathbf{v} = \overline{OB}, \mathbf{w} = \overline{OC}$, è individuato un parallelepipedo che ha tra i suoi vertici i punti O, A, B, C ; il volume del parallelepipedo è $|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}|$.
- (punti: 4)

5. Determinare i valori di h e k per cui è compatibile il sistema lineare, nelle incognite x, y, z, w

$$\begin{cases} x+3z+2w=4 \\ 2y+z+w=1 \\ 3x+y+2w=k \\ 2x-y-4z+hw=0 \end{cases}.$$

Per quei valori di h e di k per i quali il sistema ammette infinite soluzioni, trovare queste soluzioni.

Studiare il sistema lineare omogeneo associato al precedente e, per i valori di h per cui esistono autosoluzioni (soluzioni diverse da quella banale), trovare le autosoluzioni.

(punti: 3 + 2 + 2)