

Geometria analitica e algebra lineare - Prova scritta del 24 luglio 2012

Nome e cognome _____ n. matricola _____

Scrivere nome e cognome **in testa ad ogni foglio**. Consegnare questo foglio. La durata della prova è tre ore; è consentito tenere sul banco un solo foglio di appunti personali. **Risposte prive di spiegazioni NON sono sufficienti.**

1. Nello spazio vettoriale $M_{2,3}(\mathbb{R})$ delle matrici reali con 2 righe e 3 colonne, consideriamo il sottoinsieme \mathbf{U} delle matrici il cui prodotto per il primo vettore della base canonica, $\mathbf{e}_1 \in \mathbb{R}^3$, sia il vettore zero:

$$\mathbf{U} = \{ \mathbf{A} \in M_{2,3} \mid \mathbf{A}\mathbf{e}_1 = \mathbf{0} \}.$$

Dimostrare brevemente che \mathbf{U} è un sottospazio vettoriale, indicarne una base e la dimensione; trovare un sottospazio \mathbf{V} supplementare di \mathbf{U} , cioè tale che sia $M_{2,3} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$.

(punti: 3 + 2)

2. Per ciascun numero reale k , consideriamo l'applicazione $T_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y - 2z \\ x - 2z \\ x + ky + z(1 - 3k) \end{pmatrix}.$$

- Spiegare brevemente perché l'applicazione T_k è un'applicazione lineare per qualunque k , e scrivere la matrice associata, rispetto alla base canonica.
- Esistono valori di k per i quali T_k è iniettiva? Surgettiva?
- Fissato un valore k^* per il quale T_{k^*} non sia iniettiva,
 - trovare una base di $\text{Im}T_{k^*}$;
 - determinare una base dello spazio $\text{Ker}T_{k^*}$;

c. posto $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, stabilire per quali valori della componente u il sottoinsieme $T_{k^*}^{-1}(\mathbf{u})$, delle controimmagini di \mathbf{u} , **non** è vuoto, e trovarne tutti gli elementi.

(punti: 2 + 2 + 4)

3. Nello spazio sono assegnate le rette: r , di equazioni cartesiane $\begin{cases} x - y = -2 \\ x - 2z = 1 \end{cases}$, s , di equazioni parametriche, nel

parametro τ , $\begin{cases} x = \tau \\ y = 3\tau \\ z = -\tau + 1 \end{cases}$.

- Verificare che le due rette non sono parallele.
- Stabilire se le due rette sono sghembe o incidenti; nel primo caso, scrivere un'equazione cartesiana del piano per r parallelo ad s , nel secondo caso scrivere un'equazione cartesiana del piano che contiene entrambe.

(punti: 1 + 4)

4. Trovare la retta a cui appartengono i centri delle sfere che sono tangenti al piano $x = 1$ nel punto $(1,0,1)$; trovare il centro e il raggio della sfera S che, oltre ad essere tangente a piano $x = 1$ nel punto $(1,0,1)$, passa per $(0,0,0)$. Scrivere delle equazioni cartesiane della circonferenza che è la sezione di S con il piano $x = y$.

(punti 5)

5. Determinare la direzione degli assi, il centro ed il tipo della conica C di equazione $3x^2 + 4xy + 4y = 0$. Trovare il cambiamento di coordinate cartesiane ortogonali che porta l'equazione di C in forma canonica. Scrivere un'equazione cartesiana del cilindro con generatrici parallele all'asse delle z che taglia sul piano $z = 0$ la conica C .

(punti: 4 + 2 + 1)