Geometria analitica e algebra lineare – 1 marzo 2011

Nome e cognome ______________________________ n. matricola__________

Scrivere nome e cognome **in testa ad ogni foglio. Consegnare questo foglio.** La durata della prova è tre ore; è consentito tenere sul banco un solo foglio di appunti personali. Motivare le risposte: ***risultati privi di spiegazioni NON sono considerati validi.***

1. Nello spazio, sono assegnate le rette *r*, di equazioni cartesiane $\begin{cases} x+y+3z=-3 \\ y+z=1 \end{cases}$, *s*, di equazioni parametriche, nel parametro *t*, $\begin{cases} x=-3-2t \\ y=-t \\ z=-3+t \end{cases}$. Stabilire se esse sono sghembe o complanari; nel primo caso, trovare la loro distanza, nel secondo caso, trovare il piano che le contiene.

(2 + 3 punti)

2. Trovare il centro, il raggio e scrivere un'equazione della superficie sferica che è tangente nel punto $T = (-3,-3,-3)$ al piano $y = -3$ e che passa per il punto $A = \left(\frac{-3}{2}, \frac{-3}{\sqrt{2}}, \frac{-3}{2}\right)$. Rappresentare in forma cartesiana la circonferenza massima, di questa sfera, che passa per A e per T.

(3 + 2 punti)

3. Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali x,y, è assegnata la conica di equazione $x^2-3y^2+6x+8=0$. Studiare questa conica, determinandone, se possibile, il centro, gli asintoti, gli assi di simmetria, i vertici e delle equazioni parametriche. Utilizzare lo studio precedente per stabilire il tipo della quadrica che, nello spazio riferito a coordinate cartesiane ortogonali x,y,z, è definita dall'equazione $x^2-3y^2+6x+8=0$.

(4 + 1 punti)

4. Nello spazio vettoriale $M_3(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate di ordine 3 a elementi reali, si consideri il sottoinsieme $\boldsymbol{T}_{inf}$ (delle matrici "triangolari inferiori") costituito da quelle matrici $\mathbf{A} = (a_{ik})$, con i, k =1,2,3, i cui elementi soddisfano le condizioni: $a_{ik} = 0$ per $i < k$. Stabilire se $\boldsymbol{T}_{inf}$ è un sottospazio vettoriale di $M_3(\mathbb{R})$ e, in caso affermativo, calcolarne la dimensione.

(4 punti)

5. Si consideri la famiglia delle applicazioni lineari $\mathbf{F}(h)$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ che, rispetto alle basi canoniche, sono associate alle matrici $\mathbf{A}_h = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 2 & h & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

   i) Per ogni valore di *h*, indicare la dimensione e una base di Ker ($\mathbf{F}(h)$)**.** Vi sono valori di *h* per cui $\mathbf{F}(h)$ è iniettiva?

   (3 + 1 punti)

   ii) Esiste qualche applicazione $\mathbf{F}(h)$ nella quale, per qualche *k*, il vettore $\mathbf{b}(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ammetta delle controimmagini? Se la risposta è positiva, trovare tutte le controimmagini.

   (3 + 1 punti)

   iii) Posto $h = -3$, scegliere un sottospazio vettoriale **V** in modo che sia $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Im}\,\mathbf{F}(-3) \oplus \mathbf{V}$.

   (2 punti)

   iv) Utilizzando i risultati ottenuti sopra, stabilire, con un breve ragionamento, se tra le applicazioni lineari che sono associate alle matrici trasposte $\mathbf{A}_h^{\mathrm{T}}$ vi siano delle applicazioni surgettive.

   (1 punto)