

Geometria analitica e algebra lineare – 1 marzo 2011

Nome e cognome _____ n. matricola _____

Scrivere nome e cognome **in testa ad ogni foglio**. **Consegnare questo foglio**. La durata della prova è tre ore; è consentito tenere sul banco un solo foglio di appunti personali. Motivare le risposte: risultati privi di spiegazioni NON sono considerati validi.

1. Nello spazio, sono assegnate le rette r , di equazioni cartesiane $\begin{cases} x+y-z=1 \\ y+z=1 \end{cases}$, s , di equazioni parametriche, nel parametro t , $\begin{cases} x=1-2t \\ y=-t \\ z=1+t \end{cases}$. Stabilire se esse sono sghembe o complanari; nel primo caso, trovare la loro distanza, nel secondo caso, trovare il piano che le contiene.

(2 + 3 punti)

2. Trovare il centro, il raggio e scrivere un'equazione della superficie sferica che è tangente nel punto $T = (1,1,1)$ al piano $y = 1$ e che passa per il punto $A = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$. Rappresentare in forma cartesiana la circonferenza massima, di questa sfera, che passa per A e per T .

(3 + 2 punti)

3. Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali x,y , è assegnata la conica di equazione $x^2 + 4y^2 - 8x + 15 = 0$. Studiare questa conica, determinandone, se possibile, il centro, gli asintoti, gli assi di simmetria, i vertici e delle equazioni parametriche. Utilizzare lo studio precedente per stabilire il tipo della quadrica che, nello spazio riferito a coordinate cartesiane ortogonali x,y,z , è definita dall'equazione $x^2 + 4y^2 - 8x + 15 = 0$.

(4 + 1 punti)

4. Nello spazio vettoriale $M_3(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate di ordine 3 a elementi reali, si consideri il sottoinsieme T_{inf} (delle matrici "triangolari inferiori") costituito da quelle matrici $\mathbf{A} = (a_{ik})$, con $i, k = 1, 2, 3$, i cui elementi soddisfano le condizioni: $a_{ik} = 0$ per $i < k$. Stabilire se T_{inf} è un sottospazio vettoriale di $M_3(\mathbb{R})$ e, in caso affermativo, calcolarne la dimensione.

(4 punti)

5. Si consideri la famiglia delle applicazioni lineari $\mathbf{F}(h): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che, rispetto alle basi canoniche, sono associate alle

matrici
$$\mathbf{A}_h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & h & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- i) Per ogni valore di h , indicare la dimensione e una base di $\text{Ker}(\mathbf{F}(h))$. Vi sono valori di h per cui $\mathbf{F}(h)$ è iniettiva?

(3 + 1 punti)

- ii) Esiste qualche applicazione $\mathbf{F}(h)$ nella quale, per qualche k , il vettore $\mathbf{b}(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ammetta delle

controimmagini? Se la risposta è positiva, trovare tutte le controimmagini.

(3 + 1 punti)

- iii) Posto $h = 1$, scegliere un sottospazio vettoriale \mathbf{V} in modo che sia $\mathbb{R}^4 = \text{Im} \mathbf{F}(1) \oplus \mathbf{V}$.

(2 punti)

- iv) Utilizzando i risultati ottenuti sopra, stabilire, con un breve ragionamento, se tra le applicazioni lineari che sono associate alle matrici trasposte \mathbf{A}_h^T vi siano delle applicazioni surgettive.

(1 punto)