

## Che cosa si intende per angolo?

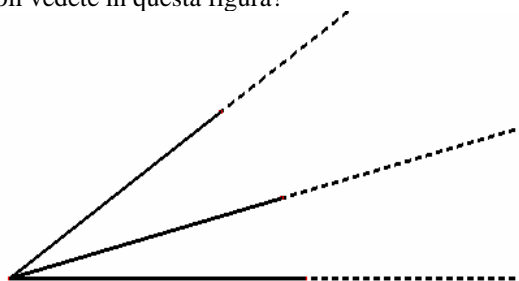
**Letture** vivamente consigliate:

V. Villani, *Cominciamo dal punto*, Pitagora 2006, n. 12: **Cosa si intende per angolo? E perché questa nozione presenta tante difficoltà?**

Nicolina A. Malara, *L'insegnamento della geometria nella scuola media: questioni teoriche e didattico-metodologiche*, in "L'insegnamento della geometria", quaderno 19/1 del M.P.I., reperibile al sito [http://www.liceovallisneri.it/frame\\_iniziali/setframe\\_publicaz.html](http://www.liceovallisneri.it/frame_iniziali/setframe_publicaz.html)

### 0. Che cosa pensa una persona “normale” se sente parlare di “angolo”?

- Troviamoci all'angolo di via Buonarroti con via Previati
- Stanno tirando un calcio d'angolo
- Questo posto è un angolo di paradiso
- Nel soggiorno c'è l'angolo di cottura
- Tagliamo un angolo di pizza
- Che cosa si nasconde dietro l'angolo?
- Da Villani, pag. 150: quanti angoli vedete in questa figura?



### 1. Che cosa si legge sui libri di matematica a proposito della definizione di “angolo”?

- (a) E' l'intersezione di due semipiani, le cui origini sono rette incidenti
- (b) E' una parte convessa <sup>(1)</sup> di piano delimitata da una coppia di semirette non allineate, aventi la stessa origine.
- (c) E' una delle due regioni piane delimitate da una coppia di semirette non allineate, aventi la stessa origine; una regione è convessa, l'altra no (*concava*).
- (d) E' l'intersezione o l'unione di due semipiani le cui origini non sono parallele.
- (e) Un angolo  $ABC$  è una coppia di semirette  $BA, BC$  (dette *lati*) non appartenenti alla stessa retta, aventi la stessa origine  $B$  (*vertice*) (Hilbert).
- (f) E' una coppia *ordinata* di semirette  $a, b$  con la stessa origine.
- (g) E' la regione di piano spazzata da una semiretta che ruota, *in un verso* prefissato, attorno alla sua origine, dalla posizione iniziale  $a$  alla posizione finale  $b$ .
- (h) Dopo aver definito le isometrie piane e studiato le loro proprietà, si dà il nome di “rotazione” a una isometria che ha un solo punto unito. Si definisce angolo di vertice  $V$  e lati  $a, b$ , la rotazione che tiene fisso il punto  $V$  e manda la semiretta  $a$  di origine  $V$ , nella semiretta  $b$  (Choquet).
- (i) E' il movimento rigido che porta la semiretta  $a$  di origine  $V$  sulla semiretta  $b$ , con la stessa origine, tenendo conto del *numero completo di giri* intorno a  $V$  compiuti, in un *senso* prefissato.

Da Villani, pag. 133: “Il fatto è che il termine “angolo” non individua un unico concetto, ma piuttosto un campo concettuale, con numerose sfaccettature.” Secondo Vergnaud<sup>2</sup>, “un campo concettuale è un insieme di problemi e di situazioni per trattare i quali sono necessari concetti, procedure, e rappresentazioni, differenti ma strettamente connessi.”

Quali motivazioni costringono ad abbandonare le definizioni “elementari”, come le (a), (b) ricordate sopra?

- Come definire la somma di due angoli, in modo che il risultato sia in ogni caso ancora un angolo?
- Quali definizioni comprendono anche i casi “limite”: angolo nullo, piatto, giro?

<sup>1</sup> Un insieme si dice *convesso* se, presi due suoi punti qualsiasi, ogni punto del segmento che li ha come estremi appartiene all'insieme.

<sup>2</sup> In B. D'Amore, *Elementi di didattica della matematica*, Pitagora, 1999, cap. 12: Campi concettuali, campi di esperienza, campi semantici.

- Come definire la “misura” in modo che valga le proprietà di additività delle misure (la misura dell’angolo somma è la somma delle misure dei due addendi)?

La (i) è la definizione di “angolo generalizzato orientato”. Con questa definizione, gli angoli costituiscono una “classe di grandezze”, cioè un insieme nel quale è definita una relazione di ordine ( $\leq$ ), un’operazione di somma, e per il quale è possibile definire una misura (corrispondenza biunivoca con i numeri reali) che sia additiva.

Villani consiglia l’uso del **modello della scala a chiocciola** per rendere comprensibile il concetto di angolo generalizzato orientato. Offre varie motivazioni per la necessità di introdurre questo concetto: la distinzione tra “virata” e “stambata” nella navigazione a vela, la considerazione degli angoli esterni di un poligono e infine il fatto che altrimenti la spirale di Archimede si ridurrebbe ad un solo giro.

Non è da meravigliarsi, quindi, se gli studenti compiono errori nel trattare gli angoli, a partire dalle scuole medie.

**Secondo** Malara (citata sopra) sono frequenti:

- L’identificazione dell’angolo con il suo vertice (origine dell’errore: l’uso del termine nel linguaggio comune)
- L’idea di angolo come parte limitata di piano (indotto dall’identificazione dell’angolo con la sua raffigurazione, e dal fatto che spesso si considerano solo una parte di un angolo, per esempio: *angoli interni a triangoli*)
- L’affermazione che sia maggiore l’angolo i cui lati sono rappresentati nel disegno con segmenti più lunghi, o che sono segnati da archi di cerchio più ampi (errore indotto, come nel caso precedente, dall’identificazione dell’angolo con la sua raffigurazione)
- L’incapacità di riconoscere un angolo retto se i lati non sono paralleli ai lati del foglio su cui è disegnato
- L’incapacità di confrontare due angoli se non hanno un lato in comune o se un lato di uno non sta su una retta parallela a un lato dell’altro.

Occasione di confusione può venire dalla frase “angolo di due rette”, frequente in geometria analitica; se le rette sono incidenti e non sono orientate, si prende come loro angolo il minore tra quelli da esse individuati, se sono orientate, si prende quello delle semirette positivamente orientate. Se le rette sono parallele, si prende l’angolo nullo se le rette non sono orientate, altrimenti può essere l’angolo nullo o piatto a seconda delle orientazioni di ciascuna delle due.

Poco intuitiva risulta anche la definizione di “angolo esterno” di un poligono. In Prodi e Bastianoni, *Scoprire la matematica - Geometria del piano*, Ghisetti e Corvi, 2003, a proposito degli angoli esterni si dice (p. 167-8):

....dato un poligono convesso di  $n$  lati  $A_1, A_2, \dots, A_n$  [...] i vertici possono essere letti, nell’ordine, a partire da uno qualsiasi di essi e in ciascuno dei due versi [...] A ciascuno dei due versi di lettura dei vertici corrisponde un verso di percorrenza del contorno. E’ opportuno notare che il poligono convesso resta sempre alla destra di chi percorre il suo contorno in verso orario, alla sinistra di chi lo percorre in verso antiorario; è l’esperienza, ad esempio, di chi percorre gli splendidi viali sull’anello murario che circonda la città di Lucca.

Se, come nel nostro caso, il percorso è poligonale, ad ogni vertice si ha un brusco cambiamento di direzione. Quando si va da  $A_{k-1}$  ad  $A_k$ , giunti in  $A_k$ , il cambiamento di direzione è rappresentato dall’angolo che ha vertice in  $A_k$  e per lati la semiretta prolungamento del lato  $A_{k-1} A_k$  dalla parte di  $A_k$  e la semiretta  $A_k A_{k+1}$ , che contiene il lato in cui ci si immette (e che è consecutivo al precedente). L’angolo ora considerato si dice *angolo esterno* corrispondente al vertice  $A_k$ . Se il contorno poligonale è percorso nel verso opposto a quello precedente, i cambiamenti di direzione saranno rappresentati da altri angoli, opposti al vertice rispetto a quelli considerati prima. Anche questi angoli sono detti angoli esterni.

In definitiva, gli angoli esterni di un poligono vanno presi orientati. Si veda il problema proposto più sotto.

La situazione si complica se si passa alla considerazioni di angoli nello spazio. Per comodità, ricordiamo le principali definizioni già considerate in precedenti occasioni.

**Angoli di due rette sghembe:** date due rette  $r, s$ , ed un punto  $P$ , per  $P$  passano una sola retta  $r'$  parallela ad  $r$  ed una sola retta  $s'$  parallela ad  $s$ ; gli angoli formati da  $r', s'$  non dipendono dalla scelta di  $P$ . Da qui la definizione di angoli tra due rette sghembe come quelli di due parallele ad esse.

Due rette sghembe  $r, s$  sono perpendicolari se, scelto un qualsiasi punto  $P$ , le rette per  $P$  rispettivamente parallele ad  $r, s$  sono perpendicolari tra loro.

**Angolo retta-piano:** se una retta che incontra un piano, gli angoli che essa forma con le rette del piano dipendono da queste ultime: qual è il minimo? E' l'angolo acuto che la retta forma con la sua proiezione ortogonale sul piano.

Una retta è perpendicolare ad un piano se è perpendicolare ad ogni retta del piano. Si dimostra che se una retta è perpendicolare a due rette di un piano, allora è perpendicolare al piano.

**Angolo diedro:** si chiama *diedro* una coppia di semipiani aventi lo stesso bordo (origine)  $r$ ; i due semipiani sono detti *facce* del diedro, la retta  $r$  *spigolo del diedro*.

Un piano ortogonale alla retta  $r$  taglia le facce del diedro secondo due semirette, il cui angolo è detto *sezione normale del diedro*. Si prende come **ampiezza dell'angolo diedro quella della sezione normale**. Non è la minima tra le ampiezze degli angoli che si ottengono secando il diedro con un piano (la minima è uguale a zero).

Un diedro è *retto*, *ottuso*, etc. se la sezione normale è un angolo retto, ottuso, etc.

Due piani che si incontrano sono *perpendicolari* se determinano quattro diedri uguali (retti).

**Triedro:** un triedro è costituito da un vertice  $V$  e da 3 semirette, di origine  $V$ , *non complanari*, dette *spigoli*; ogni coppia di spigoli determina un angolo, detto *faccia del triedro*, e ogni coppia di facce piane determina un diedro. La somma delle *facce* è minore di 4 angoli retti.

**Teorema (disuguaglianza triangolare):** *l'ampiezza angolare di ogni faccia del triedro è minore della somma delle ampiezze delle altre due facce.*

La generalizzazione della configurazione precedente è detta *angoloide*. Un angoloide *convesso* è costituito da un  $n$ -upla ordinata di semirette (*spigoli*) di origine  $V$  (*vertice*), ordinati in modo che la faccia di due spigoli consecutivi lascia i rimanenti da una stessa parte; due facce consecutive determinano un diedro.

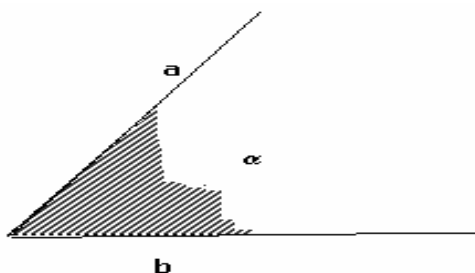
Si dimostra che *in un angoloide una faccia è minore della somma delle rimanenti e la somma delle facce è minore di 4 angoli retti.*

## 2. Per riflettere sul concetto di angolo.

1. Da V. Villani, *Errori nei testi scolastici: geometria*, Archimede, anno XLV, 1993, n. 3, pag. 134-144.

"Citazione da un testo di matematica per il triennio della scuola secondaria superiore.

I. Un angolo  $\alpha$  è una porzione di piano delimitata da due semirette  $a$  e  $b$  uscenti da uno stesso punto  $O$ , che prende il nome di vertice dell'angolo, mentre le due semirette sono dette lati. Due angoli  $\alpha$  e  $\beta$  sono **uguali** se esiste una rototraslazione che sovrapponga i vertici e i lati.



II. Due angoli si dicono **contigui** se hanno il vertice e un lato in comune: la regione di piano da essi coperta si dice **somma** dei due angoli. E' evidente che la somma di due angoli può esaurire tutto il piano.

III. Definita la somma si possono considerare i multipli di un angolo [...] Si accetta, come postulato, che per ogni angolo  $\alpha$  e ogni intero  $n$  esista un angolo  $\beta$  tale che  $n\beta = \alpha$ .

IV. Infine, l'angolo  $\alpha$  si dice **maggiore** o **uguale dell'angolo**  $\beta$  se  $\alpha$  è uguale a un angolo  $\alpha^*$  contiguo a  $\beta$  tale che la regione di piano determinata da  $\alpha^*$  contenga quella determinata da  $\beta$ ."

Avete trovato delle contraddizioni?

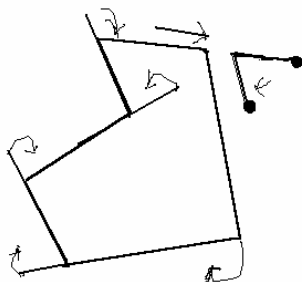
Le domande che seguono possono indicare alcuni spunti di riflessione.

1. Poiché la trasformazione identica porta ogni semiretta in se stessa, si potrebbe dedurre dalla definizione I che l'angolo convesso di lati  $a, b$  è uguale all'angolo concavo con gli stessi lati?
2. Sapete fare un esempio di angoli contigui secondo la definizione II per i quali la somma sia diversa dalla "regione di piano da essi coperta"?

3. Quale significato bisogna dare al termine “contiguo” (definito in II) perché la definizione IV sia ragionevole? Lo stesso significato che occorrerebbe per III?

2. Da Claudio Bernardi, *Come e che cosa dimostrare nell'insegnamento della matematica*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 20A, n. 5, 1997, pag. 508-522.

"La somma degli angoli esterni di un poligono  $P$  è uguale a quattro angoli retti (e quindi non dipende dal numero dei lati di  $P$ ). Questo enunciato di geometria elementare si può "dimostrare" seguendo il contorno di  $P$  con un fiammifero, come suggerito in figura: in corrispondenza ad ogni vertice di  $P$ , il fiammifero ruota di un



angolo (orientato) uguale all'angolo esterno in quel vertice; alla fine, il fiammifero ha fatto un giro completo, cioè quattro angoli retti." (La figura è una copia (brutta) di quella contenuta nell'articolo citato).

Può essere opportuno cominciare considerando un poligono convesso e passare poi al poligono concavo, stabilendo una definizione di "angolo esterno" che vada bene per entrambi i casi (si rilegga il passo di Prodi e Bastianoni riportato sopra).

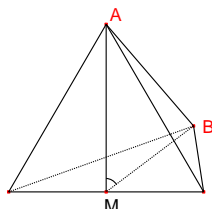
3. Da R. Porcaro, *Angolo: un problema didattico aperto*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 16, n. 8, 1993, pag. 689-712, dove si parla di un'indagine per stabilire se gli studenti delle scuole superiori sanno usare la misura degli angoli. Due quesiti utilizzati nell'indagine sono:

- E' possibile disegnare un angolo di  $765^\circ$ ? Giustifica la risposta.
- E' data la seguente funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dove  $x \rightarrow (\sin(x) + \cos(x))$ . Calcolane la derivata. Per  $x = 3/2$  detta derivata assume un valore positivo, negativo o nullo? Giustifica la risposta.

4. Qual è l'ampiezza degli angoli diedri di un cubo? E di un tetraedro regolare? (controllare se la risposta alla seconda domanda può essere  $2 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ )

5. Come definireste una rotazione del piano in una prima classe di scuola superiore?

**Nota.** La risposta alla seconda domanda dell'esercizio 4 è  $\arccos(1/3) = 2 \arcsin(\frac{1}{\sqrt{3}})$ : infatti, l'ampiezza di una sezione normale ad uno dei diedri del tetraedro regolare è quella dell'angolo delle altezze di due facce.



E' l'ottaedro regolare ad avere angoli diedri di ampiezza  $2 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$  !