15 aprile '08

Poligoni con riga e compasso

Affrontiamo alcuni problemi di costruzione con riga e compasso, che ci aiuteranno a ricordare le principali relazioni tra le circonferenze e le rette, gli angoli inscritti, i poligoni.
Come nelle precedenti lezioni, per ciascun problema l'attività si articolerà secondo lo schema:

1. **riflessione individuale e in piccoli gruppi**
2. **presentazione delle soluzioni**
3. **giustificazione delle costruzioni**, in base a
   a. **elenco condiviso** di conoscenze di base date per acquisite
   b. **utilizzo** dei dati e dalle conoscenze di base,
4. **riepilogo dei** termini introdotti e dei risultati ottenuti.

Problema 1: il poligono più semplice.
Tracciato su un foglio di carta un qualsiasi triangolo, ABC, si può disegnare, con riga e compasso, una circonferenza che passi per i tre vertici A, B, C?

Problema 2: ancora sul triangolo.
Dato un qualsiasi triangolo ABC, esiste una circonferenza tangente ai suoi tre lati? Come fare per disegnarla?

Problema 3: sui quadrilateri.
Trovare delle condizioni che devono essere soddisfatte da un quadrilatero ABCD affinché esista una circonferenza che passa per tutti e quattro i suoi vertici.

Problema 4: il rettangolo.
Data una circonferenza C, inscrivere in essa un rettangolo. Giustificare il procedimento di costruzione escogitato. Quante sono le soluzioni del problema diverse (non congruenti) tra loro?
Suggerimento*:* può essere utile ricordare che *ogni angolo inscritto in una semicirconferenza è retto.*

Problema 5: le tangenti ad una circonferenza.
Sono dati una circonferenza ed un punto esterno P ad essa. Quante sono le rette che passano per P e sono tangenti alla circonferenza? Giustificare la risposta e dare una costruzione con riga e compasso.

Problema 6: con più lati.
Esistono poligoni con più di 4 lati che siano inscrivibili in una circonferenza? Trovare degli esempi.

Problema 7: l'ottagono regolare.
Data una circonferenza C, inscrivere in essa un ottagono regolare.

Problema 8([1]): l'ottagono regolare di dato lato.
Dato un segmento l, costruire l'ottagono regolare con lato congruente a l.

Ben più difficili i due problemi finali, di grande interesse storico:

Problema 9([2]): è possibile costruire un qualsiasi poligono regolare con riga e compasso?
Problema 10([3]): costruire con riga e compasso un pentagono regolare.

11. Riflessione
1. **Nel ruolo di allievo**
2. **Nel ruolo di docente**

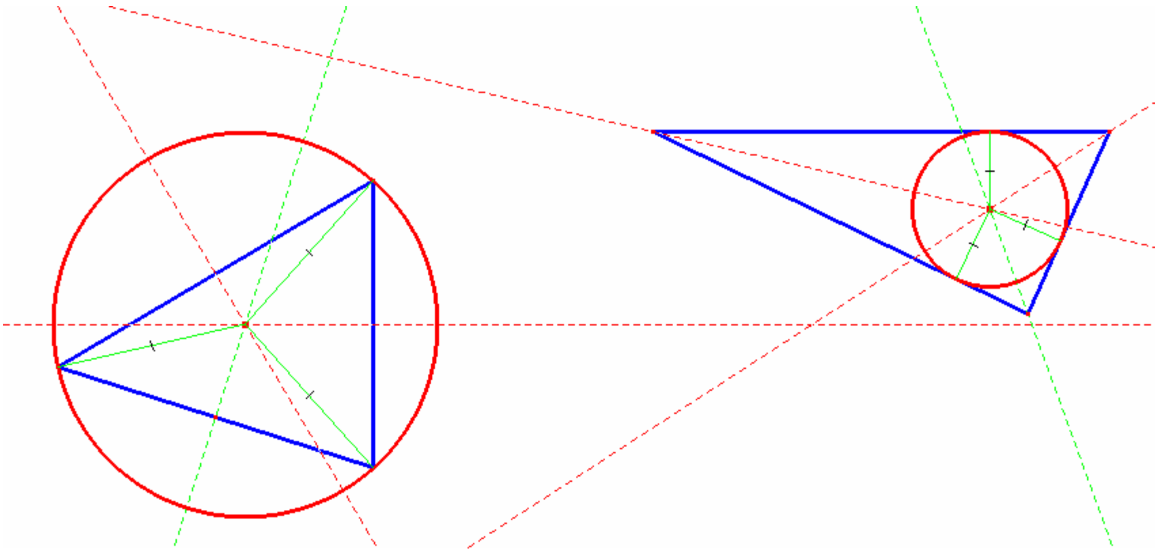
---

[1] A. Brigaglia e G. Indovina, *Stelle, girandole e altri oggetti matematici*, Zanichelli Decibel, 2003, cap. 3, pag. 44
[2] V. Villani, *Cominciamo dal punto*, pag. 196; per approfondimenti vedere un testo sulla teoria di Galois, oppure M. Kline, *Storia del pensiero matematico*, Einaudi, 1972, o R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and beyond*, Springer, New York, 2000, n. 29
[3] Ad esempio, A. Brigaglia e G. Indovina, *Stelle, girandole e altri oggetti matematici*, Zanichelli Decibel, 2003, cap. 3, pag. 49 e seguenti

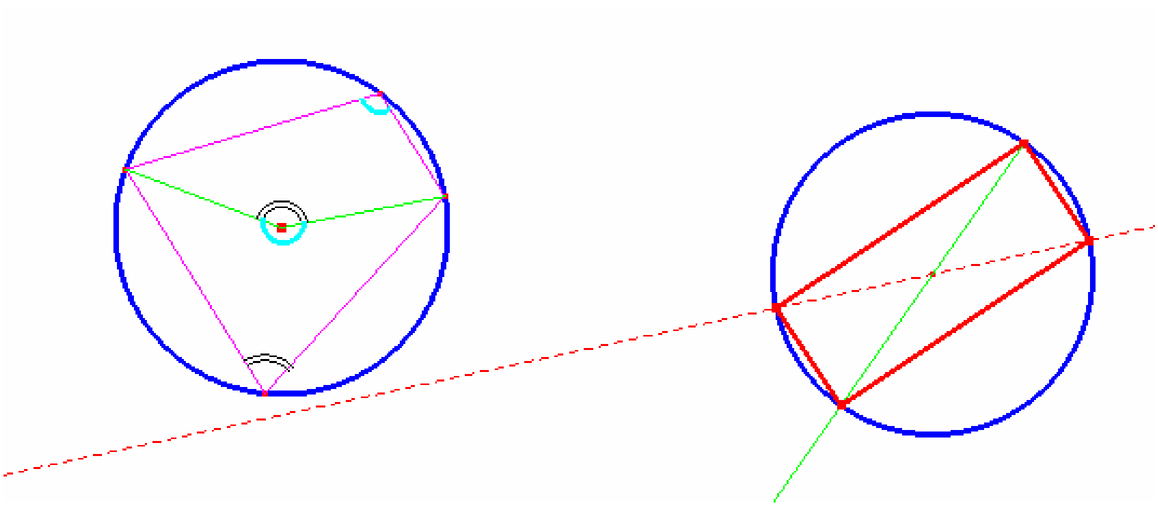
15 aprile '08

Note.

Per risolvere il problema 1 occorre determinare un punto che abbia ugual distanza dai tre vertici del triangolo. Data per nota la caratterizzazione dell'asse di un segmento, come luogo dei punti equidistanti dagli estremi del segmento, se ne deduce (per la proprietà transitiva dell'eguaglianza) che il punto comune agli assi di *due* lati del triangolo appartiene anche all'asse del *terzo* lato; dunque i tre assi passano per uno stesso punto, che è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo.
In maniera analoga, per risolvere il problema 2 occorre determinare un punto che abbia ugual distanza dai tre lati, e si trova che questo è il punto in cui concorrono le tre bisettrici degli angoli interni del triangolo: infatti, il punto comune a *due* di queste bisettrici appartiene anche alla *terza*.

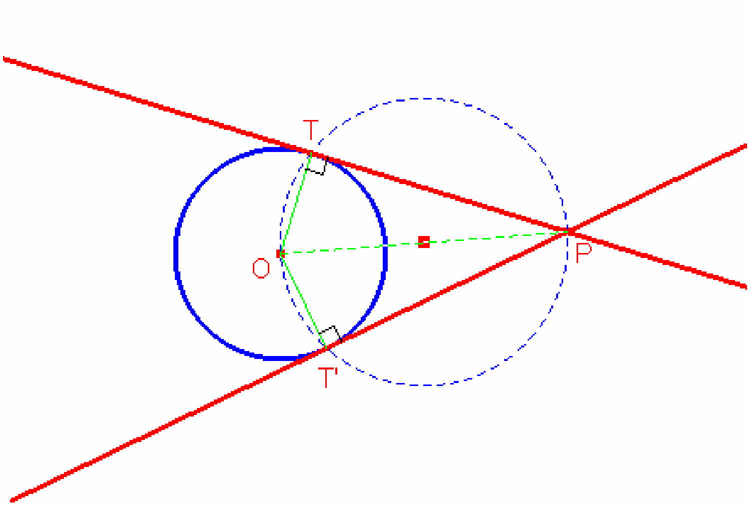


Sulla base delle conoscenze acquisite con lo studio del primo problema, si può osservare che non necessariamente gli assi dei lati di un quadrilatero passano per uno stesso punto e che quindi non tutti i quadrilateri sono inscrivibili in circonferenze. Se si conosce la relazione tra angoli al centro e angoli alla circonferenza che insistono su uno stesso arco[4], si ricava la condizione necessaria perché un quadrilatero sia inscrivibile in una circonferenza: angoli opposti devono essere supplementari, in quanto la somma dei corrispondenti angoli al centro è l'angolo giro.
In particolare, i rettangoli sono inscrivibili in circonferenze. La costruzione richiesta dal problema 4 si ottiene scegliendo un diametro, prendendo poi un punto a piacere su una delle due semicirconferenze ed infine il suo simmetrico rispetto al centro della circonferenza. Il quadrilatero così determinato ha tutti e quattro gli angoli retti, perché tutti inscritti in semicirconferenze.
Fissati due vertici opposti, vi sono infinite possibili scelte del terzo vertice; perciò, tutti i rettangoli che si ottengono hanno sì le diagonali congruenti, ma non necessariamente i lati conguenti.



[4] l'angolo alla circonferenza è uguale alla metà dell'angolo al centro che insiste sullo stesso arco

Anche la soluzione del problema 5 si basa sul fatto che gli angoli inscritti in semicirconferenze sono angoli retti.
Per costruire una retta per P che sia tangente alla circonferenza data, di centro O, occorre trovare sulla circonferenza stessa un punto T tale che l’angolo $\angle OTP$ sia retto. Costruiamo perciò la circonferenza di diametro OP: questa incontra la circonferenza data in due punti, ciascuno dei quali è vertice di un angolo retto i cui lati passano, rispettivamente, per O e per P .



Congiungendo ciascuno dei punti di intersezione delle due circonferenze con P si trovano le due tangenti alla circonferenza data condotte da P .

Tra i poligoni che risolvono il problema 6 vi sono i poligoni regolari.
Non è difficile **dimostrare che** ogni poligono regolare è inscrivibile in una circonferenza, utilizzando soltanto la definizione di poligono regolare, i criteri di congruenza e le proprietà del triangolo isoscele.

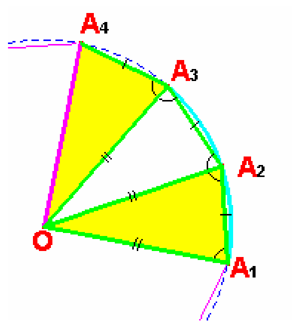
Siano $A_1, A_2, \dots A_n$, con n>3, i vertici di un poligono regolare. Costruiamo[5] la circonferenza che passa per A_1, A_2, A_3; sia O il suo centro. Osserviamo che i due triangoli OA_1A_2 e OA_2A_3 sono uguali per il terzo criterio, in quanto $OA_1 = OA_2 = OA_3$ perché raggi di una stessa circonferenza e $A_1A_2 = A_2A_3$ perché lati di un poligono regolare; ne segue che $\angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_3$, e, poiché i triangoli sono isosceli

$$\angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_1 = \angle OA_2A_3 = \angle OA_3A_2.$$

Dunque, OA_2 è bisettrice dell’angolo del poligono $\angle A_1A_2A_3$ e, essendo gli angoli del poligono tutti tra loro uguali, OA_3 è bisettrice dell’angolo $\angle A_2A_3A_4$ e anche

$$\angle OA_1A_2 = \angle OA_3A_4.$$

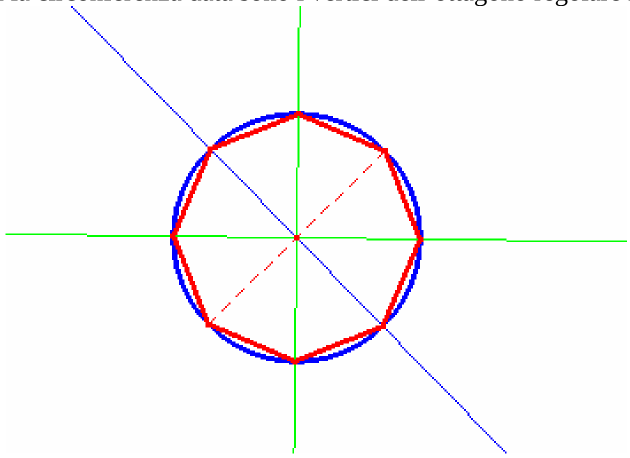
Vogliamo dimostrare che il vertice successivo, A_4, appartiene alla circonferenza. Osserviamo che i triangoli OA_1A_2 e OA_3A_4 hanno i lati A_1A_2 e A_3A_4 uguali perché lati di un poligono regolare, i lati OA_1 e OA_3 uguali perché raggi della stessa circonferenza, e gli angoli, compresi tra questi lati, uguali per il ragionamento fatto sopra: ne segue che è $OA_2 = OA_4$ e quindi che il punto A_4 appartiene alla circonferenza.



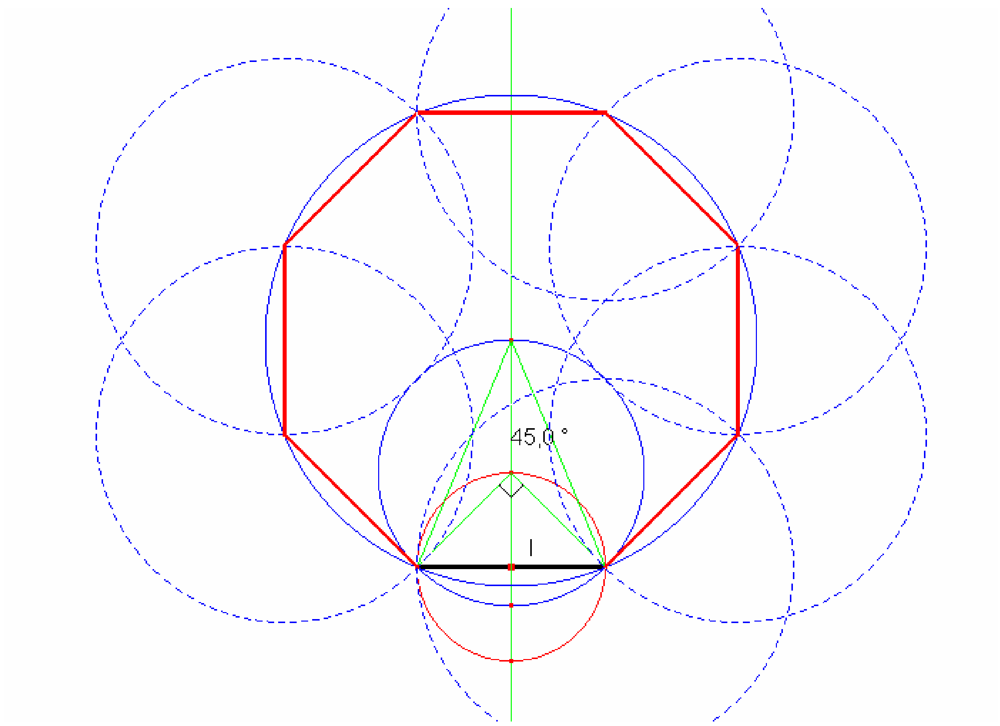
Ragionando in modo analogo si dimostra che il triangolo OA_4A_5 è uguale al triangolo OA_1A_2 e che anche il quinto vertice appartiene alla circonferenza, e così via.
C.v.d.

[5] Risolvendo il problema 1 abbiamo stabilito che per tre punti non allineati passa una circonferenza, univocamente determinata.

Il problema 7 si risolve costruendo due diametri tra loro ortogonali e quindi le bisettrici dei loro angoli: i punti di intersezione di queste rette con la circonferenza data sono i vertici dell’ottagono regolare inscritto nella circonferenza.



Il problema 8 richiede, come primo passo, la costruzione di un triangolo isoscele di base *l* ed angolo opposto di 45°. Utilizzando ancora una volta le proprietà degli angoli inscritti in circonferenze, per ottenere l’angolo di 45° cominciamo con costruirne uno di 90° i cui lati passino per gli estremi del segmento dato e il cui vertice sia sull’asse del segmento stesso. Costruiamo perciò una semicirconferenza che ha come diametro il segmento e la intersechiamo con l’asse del segmento; prendiamo il punto di intersezione come centro di una nuova circonferenza, passante per gli estremi del segmento; tra le due intersezioni di questa con l’asse del segmento una è il centro della circonferenza circoscritta all’ottagono richiesto.



La risposta alla domanda 9 non è affatto ovvia.
Negli *Elementi* di Euclide si trovano le costruzioni dei poligoni regolari con 3, 4, 5, 6, 15 lati. Poiché con riga e compasso si possono tracciare la bisettrici degli angoli al centro di un poligono inscritto in una circonferenza, se si sa costruire un poligono regolare di *n* lati si sa costruire anche uno di 2*n* lati; perciò, dai tempi degli *Elementi* di Euclide, si possono costruire i poligoni regolari con 2^k lati (k>1), con $2^k·3$ lati, con $2^k·5$ lati e con $2^k·15$ lati.
Fu il diciannovenne Carl Friedrich Gauss (1777-1855) a scoprire, nel 1796, che il poligono regolare con 17 lati è costruibile con riga e compasso. Ma Gauss non si fermò a questo pur brillantissimo risultato. Egli dimostrò che un poligono regolare con *p* lati, con *p* primo dispari, è costruibile con riga e compasso se *p* è un primo di Fermat, cioè della forma

$$2^{2^n}+1.$$

I primi di Fermat conosciuti sono 3, 5, 17, 257, 65537; è stato dimostrato che molti numeri di Fermat non sono primi.

Nel 1837 L. Wantzel[6] dimostrò che se un poligono regolare con *p* lati, con *p* primo dispari, è costruibile con riga e compasso, allora *p* è un primo di Fermat.
Riassumendo, vale il

Teorema di Gauss-Wantzel. *Un poligono regolare di n lati è costruibile con riga e compasso se e solo se n è un intero maggiore di* 2 *che abbia come massimo fattore primo dispari o* 1 *o un prodotto di numeri primi di Fermat distinti.*

La risposta al problema 10, cioè il procedimento per costruire con riga e compasso il pentagono regolare (e il decagono regolare), è reperibile nei testi di Geometria per la scuola media superiore, oppure nel libro di Brigaglia e Indovina citato nella nota 1, o nel testo di Hartshorne citato nella nota 2, o ancora in quello di Martin indicato nell’ultima nota a piè pagina, oppure nel classico

H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, Wiley, New York, 1989

(tutti questi testi sono posseduti dalla Biblioteca di Area Tecnico Scientifica della Università della Calabria).

La costruzione del decagono e del pentagono regolari si riconduce alla costruzione della parte aurea di un segmento: il lato del decagono regolare è infatti la parte aurea del raggio della circonferenza circoscritta.
In “Matematica 2003” si trovano attività didattiche relative al pentagono regolare e al rapporto aureo: si veda
http://umi.dm.unibo.it/italiano/Matematica2003/terza/5_ORIGAM.PDF)
http://umi.dm.unibo.it/italiano/Matematica2003/terza/9_ALLA_R.PDF .

6 Ad esempio, G. Martin, *Geometric constructions*, Springer, Berlin, 1997