16 aprile ’08

Il metodo delle coordinate: vantaggi e pericoli.
(schema della lezione)

Riferimenti:
- V. Villani, *Cominciamo dal punto*, **13**. Quali sono i pregi di una trattazione della geometria per via analitica? E quali gli inconvenienti? **14.** E’ possibile dimostrare il teorema di Pitagora per via analitica? **15.** E’ possibile dimostrare il teorema di Talete per via analitica?
- Testi di geometria analitica per le scuole superiori

E’ ben noto come si introducano le coordinate cartesiane **nel piano (<u>che si suppone dato</u>):**
  - Scelta di un punto (origine), di due rette orientate per il punto (assi), di due unità di misura per le lunghezze, una su ogni asse
  - casi particolari più familiari: assi ortogonali (sistema ortogonale), una sola unità di misura per entrambi gli assi (sistema monometrico).

Il principio fondamentale su cui si basa il metodo delle coordinate: si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra punti del piano e coppie ordinate di numeri reali. **Attenzione! Per comprendere questo fatto occorre sapere**
1. come far corrispondere ad ogni segmento un numero **reale** non negativo, che è la sua misura rispetto ad una unità di misura fissata **(teoria della misura dei segmenti, costruzione dei numeri reali)**
2. come far corrispondere ad ogni numero reale un punto su una retta orientata, su cui è stata fissato un punto, cui corrisponde il numero 0 **(assioma di continuità della retta)**
3. che dati nel piano un punto P ed una retta x, per P passa una sola parallela ad x **(assioma di unicità della parallela)**

Insomma, per avvicinarsi alla geometria analitica si deve conoscere un bel po’ di geometria euclidea, e i numeri reali.

Obiezione: le coordinate si introducono già alle scuole elementari, senza bisogno di parlare di numeri reali.
Ci accontentiamo di rimanere a livelli intuitivi?

Scopo dell’introduzione delle coordinate: tradurre problemi geometrici in problemi algebrici, che si spera di saper risolvere.
Dunque la geometria analitica **non è una teoria** geometrica, **ma un metodo** per la soluzione di problemi geometrici, almeno nelle intenzioni dei fondatori, Fermat (1601-1665) e Descartes (1596-1650), come si legge in M. Kline, *Storia del pensiero matematico*, Einaudi, 1999, capitolo quindicesimo: *La geometria delle coordinate.*

Consideriamo **i primi problemi** attaccabili con il metodo delle coordinate:

***A. la distanza** tra due punt*i: come si calcola? Usando il teorema di Pitagora! (Un’altra conoscenza data per scontata.)

<u>Si noti:</u> la formula che si ottiene vale soltanto in sistemi cartesiani ortogonali e monometrici.

Attenzione al rischio di circoli viziosi (si veda Villani, l. cit., n. 14): non si può dimostrare analiticamente il teorema di Pitagora usando la formula della distanza di due punti!
Qualcuno potrebbe suggerire una scappatoia: fondare la geometria analitica sulla conoscenza di uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare definito positivo. E’ la scelta bourbakista, ma non ha dato grandi risultati quando trasportata nell’insegnamento pre-universitario.
Si può però fare la scelta meno drastica di introdurre precocemente i vettori, come suggerito anche da “Matematica 2003” (si veda http://umi.dm.unibo.it/italiano/Matematica2003/seconda/MAT_2015.PDF) con l’attività “Segui la freccia”.

***B. Rappresentazione della retta**.* Si stabilisce il **teorema:** *tutti i punti di una retta hanno coordinate che soddisfano una equazione di primo grado e tutte le soluzioni di un’equazione di primo grado esauriscono le coordinate dei punti di una retta.*

- *Occorre dimostrare questo teorema?* **Per la comprensione del metodo, a mio parere, è indispensabile.**
- Come si ottiene questo risultato? Generalmente
  - **grazie al teorema di Talete. <u>Si noti</u>**: poiché il ragionamento che porta a stabilire un legame di primo grado tra le coordinate dei punti di una retta poggia sul teorema di Talete che concerne rette parallele e rapporti tra segmenti, resta valido anche se il sistema di coordinate non è ortogonale e non è monometrico: le rette sono rappresentate da equazioni di primo grado anche in sistemi cartesiani generali.
  - In Giovanni Prodi - Donata Foà, *Scoprire la matematica. Per il biennio della scuola superiore. Il metodo delle coordinate.* Ghisetti e Corvi ed., 2003 si mostra che ogni retta può essere interpretata come l’asse di un segmento, luogo dei punti equidistanti dagli estremi del segmento; il risultato si ottiene uguagliando

distanze tra punti, pertanto sfruttando **il teorema di Pitagora. Nel seguito** bisogna mostrare che **anche in sistemi di coordinate non ortogonali** monometriche ogni retta è rappresentata da una equazione lineare e viceversa ogni equazione lineare rappresenta una retta.

- **Ostacoli** principali alla comprensione:
  - il salto da equazioni in una sola incognita, con una sola soluzione (o un numero finito di soluzioni) a equazioni in due incognite, con infinite soluzioni
  - la considerazione di insiemi che sono definiti da equazioni
  - le troppe “forme” dello stesso oggetto (retta in forma normale, segmentaria, retta per due punti, in forma generale….)

C. Condizioni di parallelismo, di perpendicolarità: se non si sanno ricondurre ad un principio fondamentale risultano incomprensibili. Di conseguenza molti studenti concordano con il giudizio espresso da certi **studenti di liceo scientifico di Prato:** *per riuscire in matematica occorre soltanto memoria per ricordarsi la formula giusta, non c’è niente da capire!*

Su quali conoscenze si basa la comprensione delle condizioni di parallelismo e di ortogonalità?
- Compatibilità del sistema lineare delle equazioni di due rette, applicazione del teorema di Pitagora per la perpendicolarità
- Oppure, vettori, proporzionalità tra vettori che hanno la stessa direzione, prodotto scalare che si annulla per vettori ortogonali
- Uso di traslazioni e di simmetrie assiali.

I libri di testo offrono alternative diverse.

In ogni caso, c’è un lavoro preparatorio non indifferente, se si vuole la comprensione del metodo e si vogliono **evitare alcuni errori tipici**, che segnalano la **mancanza di connessione tra espressione analitica e oggetto geometrico:**
- **esempio 1:** lo studente deve scrivere un’equazione della retta per (1,1,), (2,1); scrive $\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-1}{1-1}$,....... e poi si blocca: “*non posso dividere per zero, **quindi** questa retta non esiste”*
- **esempio 2:** dovendo discutere il sistema lineare, dipendente dal parametro *k*, $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+ky=6 \end{cases}$ uno studente afferma che “*la regola di Cramer non si può applicare se k* – 4= 0; *quindi per k* = 4 *il sistema è impossibile”*. Invece il sistema è compatibile per ogni valore di *k*: per *k* = 4 le due equazioni rappresentano la stessa retta, quindi le soluzioni del sistema sono le infinite coppie (3–2a, a) che danno, al variare del parametro a, le coordinate dei punti della retta.

(Villani, pag. 159) **La soluzione di un problema per via analitica si traduce in un “programma di lavoro” articolato in quattro fasi:**
1. Scelta di un opportuno sistema di coordinate, adattato al problema geometrico
2. Traduzione del problema geometrico in un problema analitico
3. Soluzione del problema analitico
4. Interpretazione del risultato analitico in termini geometrici.

Il punto 4 è cruciale e spesso dimenticato dagli studenti. Norma fondamentale: non limitarsi a trovare il risultato, ma controllarne il significato geometrico!

Come esempio di applicazione del metodo: Villani, pag. 159, dimostra per via analitica che le altezze di un triangolo si incontrano in un punto.

Vantaggi del metodo analitico, secondo Villani:
1. sistematicità: un unico programma di lavoro
2. generalità (estensioni e applicazioni: la programmazione lineare)
3. flessibilità: si può scegliere di volta in volta il sistema di coordinate più adatto alla situazione
4. potenza
5. propedeuticità ad ulteriori sviluppi: la geometria algebrica

Quanto a 2) aggiungo: in alcuni casi la dimostrazione analitica è più semplice di quella sintetica; inoltre, il metodo analitico potrebbe essere la via più semplice per imparare la geometria dello spazio, a patto che ogni risultato analitico sia costantemente accompagnato dall’interpretazione geometrica, con un continuo sforzo di visualizzazione, almeno mentale.

Svantaggi della geometria analitica, secondo Villani:

1. presuppone una buona conoscenza dei numeri reali
2. rischia di soppiantare l’intuizione geometrica
3. contribuisce a far dimenticare le dimostrazioni incontrate precedentemente.

Preciso il secondo punto: il pericolo più grave è che si instaurino delle tecniche standard di calcolo che offuschino la comprensione e l’interpretazione geometrica dei risultati.

Spunti per riflettere sull’uso delle coordinate.

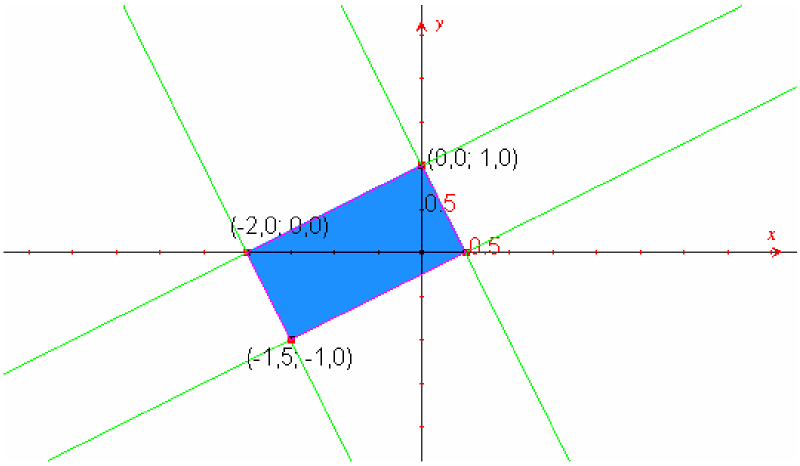
1. Disegnare il quadrilatero che ha come vertici consecutivi i punti O = (0,0), U = (1,0), V = (1,1) , W = (0,1) nei tre casi:
   a. il sistema di riferimento cartesiano è ortogonale monometrico
   b. il sistema di riferimento cartesiano è ortogonale dimetrico (non monometrico)
   c. il sistema di riferimento cartesiano non è né ortogonale né monometrico.

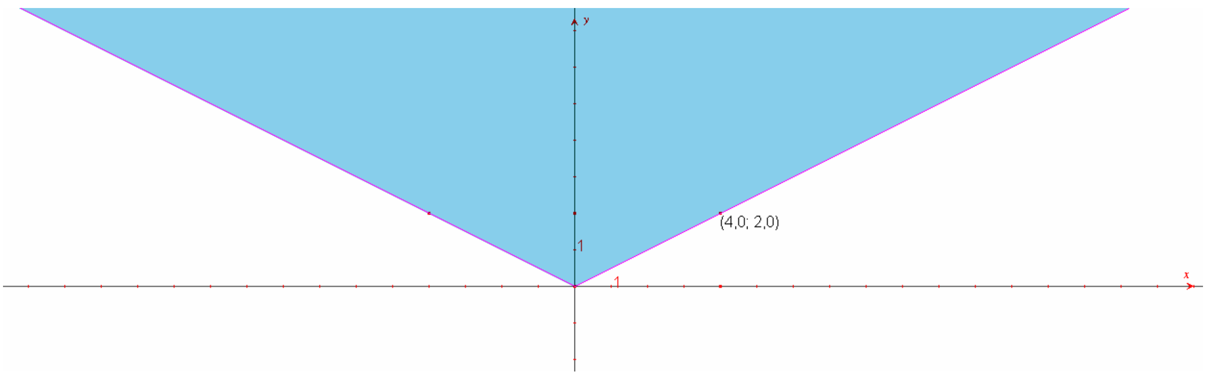
2. In un sistema di coordinate cartesiane **non** ortogonale, o **non** monometrico, come si calcolano le coordinate del punto medio tra due punti P_1= (a_1,b_1), P_2= (a_2,b_2) ?

3. Da: Giovanni Prodi - Donata Foà, *Scoprire la matematica. Per il biennio della scuola superiore. Il metodo delle coordinate.* Ghisetti e Corvi ed., 2003, cap. 3, n 3.3, Esempio 2: *un noleggiatore di videocassette propone questi due contratti alternativi:*
   - 2,5 euro per cassetta più una quota fissa annuale di 25 euro
   - 3 euro per cassetta senza nessuna quota fissa.

   Quale tariffa è più conveniente?

4. Da: Giovanni Prodi - Donata Foà, *Scoprire la matematica. Per il biennio della scuola superiore. Il metodo delle coordinate.* Ghisetti e Corvi ed., 2003, cap. 3, esercizi 72, 73 (pag. 84): descrivere algebricamente la parte di piano colorata.





5. Da: Giovanni Prodi - Donata Foà, *Scoprire la matematica. Per il biennio della scuola superiore. Il metodo delle coordinate.* Ghisetti e Corvi ed., 2003, cap. 3, esercizio 80 (pag. 87). Una ditta costruttrice di automobili ha disponibili 900 quintali di metallo con il quale costruire auto di tipo economico e vetture di lusso; ogni automobile di lusso richiede 2 q. di metallo e 200 ore lavorative, mentre ogni auto economica richiede 4 q. di metallo e 60 ore lavorative. Si dispone di 60000 ore lavorative. Se il guadagno per ogni auto di lusso è di 5000 euro e per ogni auto economica di 2000 euro, quante vetture di ciascun tipo deve produrre la ditta per realizzare il massimo guadagno?

6. Dimostrare analiticamente che le mediane di un triangolo si incontrano in un punto, che determina su ciascuna due segmenti uno doppio dell'altro. (*Suggerimento:* è possibile scegliere come assi la retta di un lato e una mediana? E scegliere anche unità di misura diverse sui due assi?)

7. Da Villani, *Cominciamo dal punt*o, n. 15, pag. 176: dimostrazione **errata** del teorema di Talete:

   a. Scelta del riferimento: le rette del fascio hanno equazioni y = *costante*
   b. Traduzione del problema geometrico in problema algebrico: le trasversali hanno equazioni $y= a x + b$, $y = c x + d$, con $a\neq 0$, $c\neq 0$, le rispettive intersezioni con le rette del fascio $y = h$, $y = k$ sono
   $$A=\left(\frac{h-b}{a},h\right),\quad B=\left(\frac{k-b}{a},k\right),\quad A'=\left(\frac{h-d}{c},h\right),\quad B'=\left(\frac{k-d}{c},k\right)$$
   da cui si ricava
   $$AB=\sqrt{(k-h)^2(1+\frac{1}{a^2})};\quad A'B'=\sqrt{(k-h)^2(1+\frac{1}{b^2})}$$
   e infine
   c. soluzione del problema analitico : $\dfrac{A'B'}{AB}=\sqrt{\dfrac{1+\frac{1}{c^2}}{1+\frac{1}{a^2}}}$
   d. interpretazione della soluzione: essendo indipendente da h,k, il rapporto tra segmenti corrispondenti è lo stesso per ogni coppia di segmenti tagliati da rette del fascio sulle due trasversali.

   Dov'è l'errore?

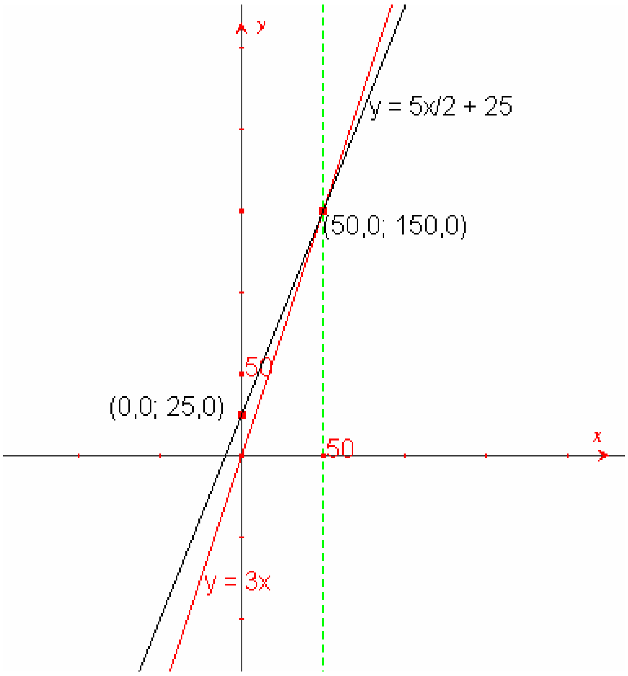
8. Equazioni di un'omotetia. a) Stabilire se è vero che, fissato nel piano un sistema di coordinate cartesiane (x,y), l'omotetia di centro l'origine delle coordinate e rapporto λ è l'applicazione che a (x,y) associa (x',y') con
   $$x' = \lambda x,\ \ y' = \lambda y\,.$$
   b) La conoscenza della rappresentazione analitica favorisce la comprensione di come agisca l'omotetia? Ad esempio, è più o meno facile capire che un triangolo e la sua immagine hanno vertici corrispondenti allineati con il centro dell'omotetia, angoli corrispondenti uguali, lati corrispondenti in rapporto costante? che una retta è mandata in una retta parallela? che una circonferenza è mandata in una circonferenza?

9. In Matematica 2003: http://umi.dm.unibo.it/italiano/Matematica2003/matematica2003.html in "Relazioni e funzioni" , vedere l'attività didattica dal titolo "Diete alimentari".

Note su alcuni degli esercizi precedenti.

L'esercizio 1 è un esempio contenuto in Villani, luogo citato. L'esercizio 2 offre un ulteriore pretesto per riflettere sul ruolo del teorema di Talete, grazie al quale in qualunque sistema di coordinate si ricava che le coordinate del punto medio di due punti sono la semisomma delle coordinate di quei punti.

Per l'es. 3, detto x il numero delle cassette noleggiate in un anno, e detto y il costo, i grafici delle due diverse funzioni lineari che esprimono il legame tra costo e numero di cassette noleggiate sono le due rette rappresentate nella figura che segue, dalla quale si ricava che la seconda tariffa conviene se in un anno si noleggiano meno di 50 cassette.



Es. 5. Sia x il numero delle auto di lusso e y di quelle economiche; i vincoli imposti sono

$$2x + 4y < 900$$

$$200x + 60y < 60.000.$$

Si deve massimizzare la funzione $g = 5000x + 2000y$. Per g *fissato*, i valori x,y che forniscono il guadagno g sono rappresentati dai punti di una retta, mentre al variare di g si ottengono rette, parallele a $y = -5x/2$, tanto più distanti dall'origine delle coordinate quanto maggiore è g.

Tra queste parallele, quella che interseca il poligono, determinato dalle disuguaglianze precedenti e da $x > 0$, $y > 0$, e che ha la maggior distanza dall'origine passa per il punto di intersezione delle due rette di equazioni $x + 2y = 450$ e $200x + 60y = 60.000$. Gli interi che approssimano le coordinate del punto di intersezione sono 273 e 88.