4 giugno 2008

Laboratorio di geometria della sfera

Avvertenze. Il materiale usato in questo laboratorio appartiene a **Matematita, Centro interuniversitario di ricerca per la comunicazione e l'apprendimento informale della matematica, www.matematita.it.** Le schede di lavoro qui sotto proposte sono versioni rivedute di tre delle schede fornite da *Matematita* insieme con le sfere di Lénárt ([1]).

1. Muoversi su una sfera.

1. Immaginate di avere un filo elastico e di disporre i suoi estremi su due punti, scelti nel piano, in modo che il filo sia teso. Quale traiettoria descrive il filo?

2. Tra le infinite possibili traiettorie che congiungono due punti scelti nel piano, la linea retta ha una proprietà che è messa in evidenza dall'esperienza immaginata in 1. Quale proprietà?

3. Passiamo ad un'altra superficie, quella della sfera, o della terra. Sulla superficie terrestre, si distinguono i meridiani e i paralleli. Che cosa sono?

4. Che cosa significano i termini "latitudine", "longitudine"? Se lo sapete, riempite gli spazi vuoti qui sotto:

- *la latitudine di un punto sulla superficie terrestre è*

- *la longitudine di un punto sulla superficie terrestre è*

5. Avete a disposizione una sfera di plastica trasparente, un "compasso", un "goniometro" e una "squadra" sferici. Disegnate un punto sulla sfera, che interpreterete come Polo Nord. Utilizzando squadra sferica e compasso (con l'appoggio per il centro), tracciate l'equatore, due meridiani e un parallelo diverso dall'equatore.
5.a. Prendete un filo, tenetelo teso per le estremità; ponete le estremità del filo su un meridiano, continuando a tenere teso il filo. Come si dispone il filo?

5.b. Ripetete l'esperimento precedente ponendo le due estremità del filo sull'equatore: come si dispone il filo?

5.c. Come si dispone il filo se le due estremità sono poste su un parallelo diverso dall'equatore?

6. Tra le infinite traiettorie che congiungono due punti della sfera, uno dei due possibili archi di cerchio massimo ha una proprietà, che è stata messa in evidenza dagli esperimenti che avete fatto con i fili: quale proprietà?

7. Nel piano, una retta individua due semipiani. Sulla sfera, una circonferenza massima che cosa individua?

8. Sapreste utilizzare la nozione di semipiano per definire l'angolo convesso nel piano? Completate la frase:
un angolo convesso nel piano è

9. Illustrate con un disegno la definizione precedente.

[1] marchio registrato, Key Curriculum Press, http://www.keypress.com/x5883.xml

10. Come modifichereste la definizione di angolo convesso per la superficie sferica? Completate la frase:
un angolo convesso sulla superficie sferica è

11. Come si può ottenere un triangolo sulla superficie sferica ("triangolo sferico")?

2. Diedri e caleidoscopi.

1. Avete a disposizione una coppia di specchi incidenti ad apertura variabile. Sapreste utilizzare un piccolo oggetto (una pallina, un cubetto.....) per capire quando l'apertura degli specchi è di 60°? e ancora, di 45°? Se sì, come?

2. Immaginate di inserire una pallina tra i due specchi a diverse aperture. Quante palline vedete, compresa quella reale?

apertura	**numero di palline**
90°	
30°	
60°	
45°	
18°	
10°	

3. Avete a disposizione le immagini di tre sfere, sulle quali sono evidenziati dei triangoli di colori differenti, e dei caleidoscopi, di tre colori. Il caleidoscopio blu è stato realizzato congiungendo, con delle pareti riflettenti, il centro della sfera con i lati del triangolo blu; analogamente sono stati realizzati quello giallo e quello rosso.
Una coppia di semipiani, aventi come bordo la stessa retta, forma un "*angolo diedro*". Ad ogni spigolo di un caleidoscopio è associato un angolo diedro. Se appoggiate una pallina allo spigolo di uno di questi diedri, cioè tra due specchi, vedete formarsi una corona di palline. Riportate i valori nella tabella relativa al caleidoscopio *che state osservando*; poi, *aiutandovi soltanto con le figure delle sfere*, riempite anche le altre due tabelle

Caleidoscopio blu	**Spigolo 1**	**Spigolo 2**	**Spigolo 3**
Numero di palline della corona			
Misura dell'angolo diedro			

Caleidoscopio rosso	**Spigolo 1**	**Spigolo 2**	**Spigolo 3**
Numero di palline della corona			
Misura dell'angolo diedro			

Caleidoscopio giallo	**Spigolo 1**	**Spigolo 2**	**Spigolo 3**
Numero di palline della corona			
Misura dell'angolo diedro			

4. I tre caleidoscopi corrispondono a tre triangoli sferici. Calcolate la somma delle misure (in gradi o radianti) dei tre angoli in ciascuno dei tre casi e riportate il risultato qui sotto:

	Somma delle misure degli angoli
Triangolo del caleidoscopio giallo	
Triangolo del caleidoscopio blu	
Triangolo del caleidoscopio rosso	

Che cosa osservate, di diverso rispetto al caso dei triangoli nel piano?

Calcolate, in ciascuno dei tre casi, di quanto la somma trovata ecceda la somma degli angoli di un triangolo nel piano:

	Eccesso
Triangolo del caleidoscopio giallo	
Triangolo del caleidoscopio blu	
Triangolo del caleidoscopio rosso	

5. Osservate le sfere delle tre figure. Aiutandovi anche con le immagini del poster “Dalla sfera ai poliedri regolari”, sapete calcolare il numero dei triangoli in cui è suddivisa ciascuna delle tre sfere? Riportate il risultato qui sotto.

	Numero dei triangoli
Sfera con il triangolo giallo	
Sfera con il triangolo blu	
Sfera con il triangolo rosso	

4. Sapreste ricavare l’area del triangolo giallo (o di quello rosso, o di quello blu) dall’area della sfera? Come?

5. Indichiamo con *r* la misura del raggio della sfera. Riportate qui sotto le misure delle aree dei triangoli corrispondenti ai tre caleidoscopi

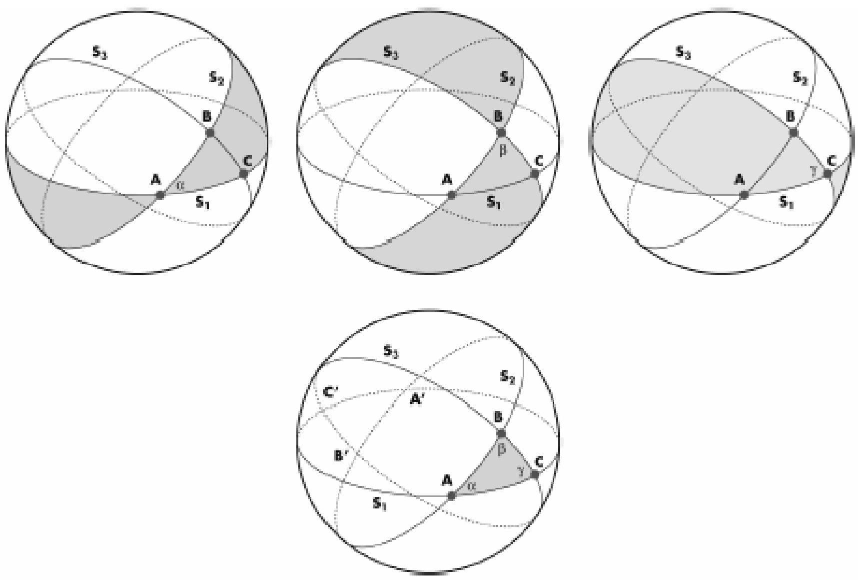
	Area del triangolo sferico
Triangolo del caleidoscopio giallo	
Triangolo del caleidoscopio blu	
Triangolo del caleidoscopio rosso	

Confrontate l’ultima tabella con quella in cui avete riportato gli eccessi sferici (in fondo all’es. 2): che cosa osservate? Provate a fare una congettura. Scrivetela qui sotto.

3. Triangoli sferici

1. Ricordate la definizione di angolo convesso sulla sfera? Un angolo sulla sfera corrisponde ad uno spicchio sferico delimitato da due semicirconferenze massime. L’area dello spicchio è proporzionale all’ampiezza dell’angolo. Quindi, conoscendo la misura della superficie della sfera di raggio *r* e l’ampiezza α dell’angolo sferico, dovrebbe essere semplice calcolare l’area dello spicchio. Sapreste scrivere qui sotto la formula dell’area dello spicchio sferico?

2. Al termine del n. 1 abbiamo definito un triangolo sferico mediante l’intersezione di tre semisfere. In modo analogo, si può ottenere il triangolo sferico ABC intersecando tre spicchi di ampiezze α, β, γ, come mostrato nelle figure qui sotto



Scrivete qui sotto le aree dei doppi spicchi, numerati rispettivamente con 1, 2, 3

Area di 1	A_1=
Area di 2	A_2=
Area di 3	A_3=

Osservate che l'unione di questi doppi spicchi è l'intera sfera. E' corretto dire che la somma delle loro aree è l'area della superficie sferica?

Perché?

Riuscite a dedurre una formula che esprima l'area del triangolo sferico ABC in funzione del raggio della sfera e degli angoli α, β, γ ?

3. Vogliamo ora scoprire insieme alcune delle differenze fondamentali tra la geometria dei triangoli sferici e quella dei triangoli piani. Ricordate la definizione di triangolo (piano) isoscele?

E quella di triangolo (piano) equilatero?

Esistono nel piano due triangoli isosceli che non sono congruenti?

Esistono nel piano due triangoli isosceli che non sono simili?

E nel caso di due triangoli equilateri?

Passiamo ora alla sfera. Come definireste un triangolo sferico isoscele?

E uno equilatero?

Aiutandovi con fili, con la squadra e con il compasso sferici, tracciate sulla sfera alcuni triangoli sferici isosceli, alcuni equilateri. Esistono triangoli sferici con due angoli retti?

E con tre angoli retti?

Nel piano, quanto misurano gli angoli di un triangolo equilatero? E sulla sfera?

Ricordando la relazione tra l'area e gli angoli di un triangolo sferico, sapreste dire quanto vale l'area di un triangolo sferico equilatero con angoli di ampiezza α?

In base a questo risultato, può esistere un triangolo sferico equilatero con angoli di 45 gradi?

Considerazioni finali sul metodo

Il metodo didattico adottato in questa proposta è dunque di tipo **"euristico" : esperimenti – congetture – verifiche – dimostrazioni.**
Questa impostazione didattica vi sembra efficace?
L'avevate già sperimentata?
La adottereste in questo modo oppure la mitighereste (ad esempio, con una introduzione che spiega lo scopo del lavoro)?