21 maggio ’08

Laboratorio di geometria dello spazio.

Introduzione

Nel libro di Vinicio Villani “Cominciamo dal punto” la domanda n. 7 è: **Viviamo nello spazio tridimensionale. Perché l’insegnamento della geometria privilegia la sola geometria del piano? Sono possibili approcci alternativi?**
I programmi ufficiali prevedono l’insegnamento della geometria dello spazio. E anche le proposte recenti, come “Matematica 2003”: nel nucleo “Spazio e figure” per il primo biennio della scuola superiore, si legge nella prima riga, sotto la voce “conoscenze”:

- Dallo spazio al piano: nozioni intuitive. Rette, semirette, segmenti, piani, semipiani, angoli. Poliedri, coni, cilindri, sfere e loro sezioni.

e sotto la voce “abilità”

- Individuare e riconoscere nel mondo reale le figure geometriche note e descriverle con la terminologia specifica. Analizzare con strumenti intuitivi sezioni piane e sviluppi piani di poliedri (cfr. *Laboratorio di matematica*)

Perché invece a scuola non si fa geometria dello spazio? Secondo Villani (pag. 59) per:

1. esigenze di sistematicità: la geometria dello spazio presuppone buona conoscenza del piano;
2. motivi pratici e organizzativi;
3. eccessiva difficoltà.

Le obiezioni di Villani a ciascuna motivazione:

1. l’insegnamento della geometria ha (pag. 60) “due obiettivi fondamentali:
   (I). Presentare agli allievi un esempio storicamente e culturalmente importante di organizzazione ipotetico-deduttiva di una disciplina scientifica
   (II). Fornire uno strumento concettuale atto a descrivere, comprendere e schematizzare la realtà in cui viviamo e formalizzare le procedure che utilizziamo per intervenire su di essa […]

Mentre il primo obiettivo può essere raggiunto anche limitandosi alla sola geometria del piano, il secondo obiettivo implica necessariamente una conoscenza (almeno a grandi linee) della geometria dello spazio. Espungere la geometria dello spazio dai programmi d’insegnamento della matematica significherebbe tra l’altro perdere un’ottima occasione di collegamento con altre discipline che la utilizzano disinvoltamente, per esempio nel disegno tecnico, in tutti i capitoli della fisica, nello studio delle strutture molecolari o cristalline, ecc.”

2. “la discrezionalità delle leggi e i programmi vigenti consentono alle scuole e ai singoli insegnanti [...] [di] sfrondare altri argomenti meno formativi […] (per esempio […] tecnicismi che appesantiscono la trigonometria).” Villani consiglia un moderato ***fusionismo*** (trattare in parallelo, nel piano e nello spazio, nozioni di parallelismo e di perpendicolarità – angoli e diedri – poligoni e poliedri – circonferenze e sfere – aree e volumi – teoremi di Pitagora e di Talete e loro estensioni).

3. E’ indiscutibile la maggiore complessità della geometria dello spazio. Villani menziona difficoltà di tipo linguistico e concettuale, e difficoltà del disegno; ragiona sulla necessità di saper leggere correttamente un disegno in ***prospettiva***[1], richiama l’opportunità di ricorrere a modelli con materiale povero; ricorda collegamenti con questioni pratiche: come fa il muratore a stabilire se uno spigolo è perpendicolare a un piano? se un piano è orizzontale? Infine Villani nota che si è instaurato un circolo vizioso, perché l’insegnante che si rende conto di avere lacune nella sua preparazione geometrica di base riduce ulteriormente nel suo insegnamento lo spazio dedicato alla geometria tridimensionale.

Villani conclude (pag. 66):

“le difficoltà specifiche dell’insegnamento-apprendimento della geometria dello spazio possono essere considerate come un motivo sufficiente per emarginarla o addirittura depennarla dall’insegnamento? La mia risposta è un convinto NO. Il parametro per decidere se trattare un argomento non deve tanto essere la sua difficoltà, quanto piuttosto la sua rilevanza rispetto agli obiettivi che si intendono perseguire. E a mio parere la valenza culturale e tecnico-operativa della geometria dello spazio deve prevalere sulle difficoltà del suo insegnamento, in tutti gli ordini scolastici.”

[1] Un bel testo di una ventina di anni fa, G. Melzi, L. Tonolini, *Corso di geometria per il liceo scientifico, vol. 2,* Minerva italica, 1986, dedica il primo paragrafo del primo capitolo sulla geometria dello spazio a: *Considerazioni sulla rappresentazione grafica delle figure spaziali.*

21 maggio '08

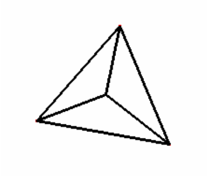
Laboratorio.

1. E' vero, come dice Villani (pag. 63) che "molti allievi (di ogni età) trovano difficile già il compito di disegnare un cubo"? Fate esempi di disegni errati e di disegni corretti.

2. Ancora da Villani (pag. 64) "Quanti studenti sono consapevoli del fatto che, a partire dal solo disegno di due rette distinte (parallele o incidenti) è impossibile stabilire se esse sono le immagini piane di due rette dello spazio complanari o sghembe?" Conoscete delle tecniche per distinguere i due casi?

3. Usando 6 bacchette uguali tra loro, costruire 4 triangoli equilateri, uguali, che hanno per lato una bacchetta.

4. Che cosa vedete in questo disegno?



5. Costruite un *tetraedro* con cannucce da bibita e nettapipe. Pensate ai piani cui appartengono le facce del tetraedro: quanti sono? Quali sono le loro intersezioni?
Pensate alle rette a cui appartengono gli spigoli del tetraedro: tra queste, ci sono rette sghembe? Giustificate la risposta!
Se le cannucce sono tutte uguali, avete costruito un tetraedro *regolare.* Due spigoli che passino per uno stesso vertice del tetraedro formano un angolo di ……
Consideriamo un vertice V; per esso passano tre spigoli. Ha senso dire che la retta di uno di questi spigoli forma con il piano degli altri due (piano della faccia che non la contiene) un angolo di ampiezza $\pi/3$? Qual può essere un modo ragionevole di definire gli angoli tra rette e piani?

6. Di quante cannucce ho bisogno per costruire lo scheletro di un cubo? Perché è più complicato costruire con le cannucce un modello accettabile di cubo (rispetto a un modello di tetraedro)?

7. Pensate ai piani cui appartengono le facce del cubo: quanti sono? Quanti fra di essi sono tra loro paralleli?
Fra le rette cui appartengono gli spigoli del cubo ci sono rette parallele, rette perpendicolari, sghembe?
Che angoli formano gli spigoli del cubo con i piani delle facce?
Due facce di un cubo o sono parallele o sono ………………………..: spiegate il significato dei termini che usate.

8. E' possibile disporre questi due oggetti in modo da costruire una piramide?

(Esercizio per casa. Disegnare con riga e compasso gli sviluppi piani delle due parti della "piramide magica" e usarli per costruire il gioco.)

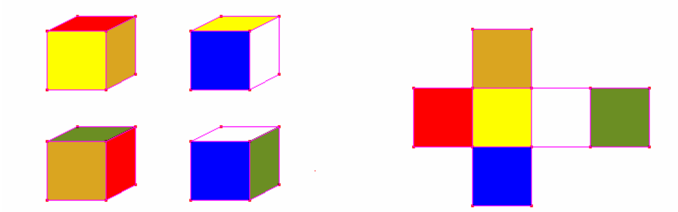
9. Se un piano ed un tetraedro *regolare* si intersecano, come può essere la loro intersezione?

10. Immaginare un cubo, sospeso su uno stagno tranquillo ([2]).

a) Supporre che la superficie dello stagno sia parallela ad una faccia del cubo. Se il cubo viene abbassato, arriva a posare una intera faccia sull'acqua. Se il cubo viene abbassato ulteriormente, quali poligoni (quali sezioni) vengono tracciati sulla superficie dello stagno?
b) Il cubo sia sospeso ad un filo agganciato a metà di uno spigolo, in modo che il cubo tocchi lo stagno soltanto lungo l'intero spigolo opposto. Quando il cubo viene abbassato lungo la verticale, quali tracce forma sulla superficie dello stagno?
c) Il cubo è appeso per un vertice e tocca la superficie dello stagno con il vertice opposto. Se viene gradatamente abbassato, quali tracce lascia sulla superficie dello stagno? All'inizio, le facce che vengono bagnate sono tre, poi.........
d) E' possibile che l'intersezione tra un cubo e un piano sia un pentagono?
e) E' possibile che l'intersezione tra un cubo e un piano sia un ottagono?

[2] Il procedimento è simile a quello suggerito da Thomas Banchoff nel capitolo 3 di "Oltre la terza dimensione", Zanichelli, 1993

11. Quale dei quattro cubi non può essere ottenuto ripiegando lo sviluppo a destra?



12. Spiegare queste affermazioni di Villani (pag. 65) “Per controllare l’orizzontalità di un pavimento l’esperienza insegna che basta posizionare una livella in due direzioni diverse: se in entrambe le direzioni la livella risulta essere orizzontale, essa sarà orizzontale anche in tutte le altre direzioni. Quanto alla perpendicolarità di uno spigolo rispetto ad un piano, basta affiancare due squadre”.

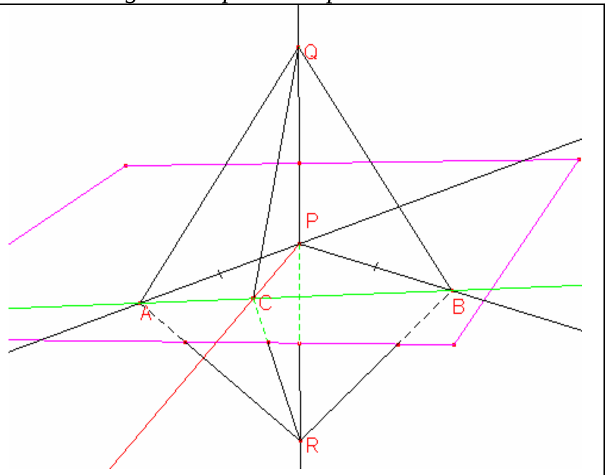
13. Riempire gli spazi vuoti nella dimostrazione del **teorema**: *se una retta incontra un piano in un punto P ed è perpendicolare in P a due rette del piano, allora è perpendicolare a ogni retta per P del piano.*

Dimostrazione. Si sceglie sulla retta un punto *Q;* sia *R* il suo simmetrico rispetto a *P*. Nel piano, sulle due perpendicolari si prendono i segmenti uguali *PA*, *PB*
Allora i triangoli *APQ*, *APR* sono ……………… per……………….
I triangoli *APQ*, *BPQ* sono ....

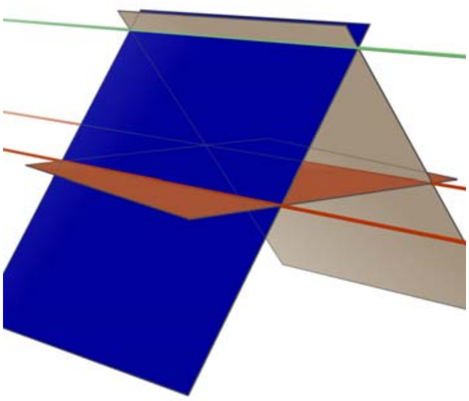
Ne segue che i triangoli *ARB*, *AQB* sono …………..

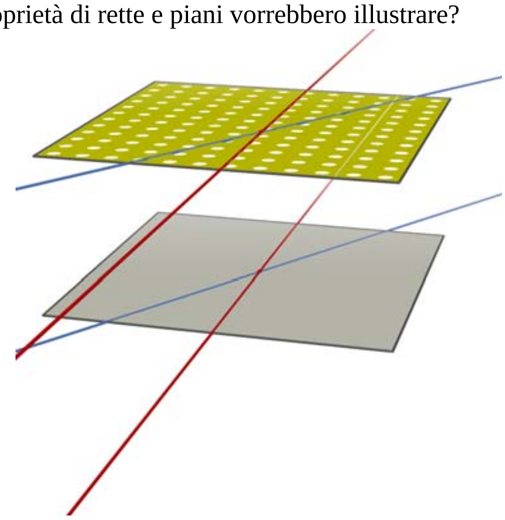
Sia *C* un punto qualunque sulla retta *AB*; consideriamo i triangoli *QAC*, *RAC*: essi sono uguali per ………

quindi è *QC* = *CR* e quindi i triangoli *QPC*, *CPR* sono .... ……….........allora gli angoli formati dalla retta *CP* con la retta *PQ* sono ………………….. , cioè la retta CP e la retta data sono ……………….



14. La figure qui sotto sono costruite con Cabri3D. Quali proprietà di rette e piani vorrebbero illustrare?





Discussione:

A) nel ruolo di studente:

quali nozioni già note ho avuto modo di ricordare con questa attività didattica?
Ho imparato qualcosa che non sapevo? Che cosa?

B) nel ruolo di docente:

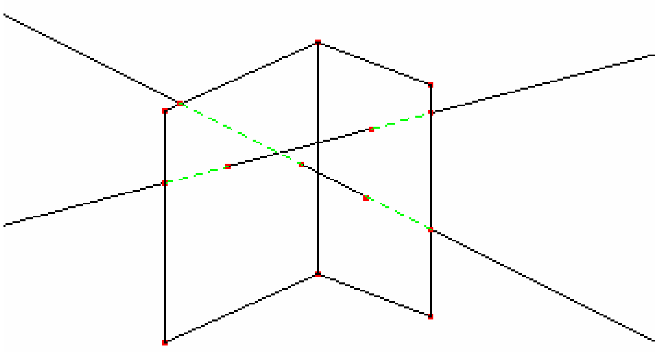
in questa proposta didattica ho notato delle carenze?
Le costruzioni manuali con materiale povero sono da riservare all’insegnamento elementare?
L’attività manuale può essere fuorviante? Quali pericoli presenta?
Come si potrebbe correggere e migliorare questo tipo di attività?

Conoscenze di geometria dello spazio coinvolte nello svolgimento del laboratorio

- le relazioni tra due piani distinti: o sono paralleli o hanno in comune una retta
- l’esistenza e unicità del piano parallelo a un piano dato per un punto fuori di esso
- la relazione di parallelismo tra rette nello spazio, che è una relazione di equivalenza
- le relazioni tra rette distinte: o incidenti, o parallele, o sghembe
- parallelismo tra retta e piano
- se due rette per un punto sono entrambe parallele ad un piano *p* allora ogni retta del piano da esse determinato è anch’essa parallela al piano *p*
- nello spazio, data una retta *r* e un punto fuori di *r*, c’è una sola retta parallela a *r* per quel punto
- angoli tra rette incidenti: sono gli angoli delle rette nel piano da esse determinato
- angoli tra rette sghembe: sono gli angoli tra le parallele alle due rette passanti per un punto a piacere
- angoli tra una retta e un piano: sono gli angoli tra la retta e la sua proiezione ortogonale sul piano
- se una retta incontra un piano in un punto *P* ed è perpendicolare in *P* a due rette del piano, allora è perpendicolare a ogni retta per *P* del piano
- dati una retta e un punto, esiste un piano per il punto per perpendicolare alla retta
- un diedro convesso è intersezione di due semispazi determinati da piani che si intersecano; la retta comune ai due piani è lo “spigolo” del diedro, i semipiani contenuti nell’intersezione sono le facce del diedro
- due diedri sono uguali se sono tali le loro “sezioni normali”, che sono gli angoli che i diedri determinano sui piani perpendicolari ai loro spigoli.

Note sulle attività e gli esercizi proposti nel laboratorio

2. Per togliere ambiguità al disegno, alle due rette sghembe si aggiungono alcuni piani ausiliari



4. L’oggetto raffigurato potrebbe essere piano, oppure non piano e convesso (un tetraedro) oppure concavo.
5. In generale, gli angoli che la retta *r*, incidente un piano in un punto *P*, forma con le rette del piano passanti per *P*, variano al variare della retta nel piano. Si definisce l’angolo di una semiretta *s* con un piano π come l’angolo che *s* forma con la sua proiezione ortogonale su π.
9. Può essere: un punto, un segmento, un triangolo, un quadrilatero (in particolare un quadrato, come mostra il n. 8).
10 d, e). Se la sezione di un piano con un cubo è un poligono, i lati del poligono sono i segmenti in cui il piano taglia le facce del cubo, che sono sei; quindi non si possono ottenere sezioni con più di sei lati. Si ottiene un esagono regolare se si prende un piano perpendicolare ad una diagonale del cubo e passante per il punto medio di uno spigolo (e quindi per i punti medi di altri 5 spigoli)[3].

Suggerimenti bibliografici.

“Simmetrie nei poliedri” in *Spazio e figure*http://umi.dm.unibo.it/italiano/Matematica2003/matematica2003.html
Thomas Banchoff , *Oltre la terza dimensione*, Zanichelli, 1993 (pag. 43, 45)
A. Lo Cicero, B. Micale, C. Milone, *Visualizzazione in geometria: previsioni di regolarità fra ombre e colori, parte II*, L’insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate, vol. 28 A n. 3, maggio 2005, pag. 223-243.

[3] http://users.libero.it/prof.lazzarini/cabrijava17.htm