7 maggio ’08

Parabole, e altre curve nel piano cartesiano
(schema della lezione)

La funzione quadratica
I programmi del Liceo scientifico (ad es http://www.edscuola.it/archivio/norme/programmi/index.html) si limitano a citare espressamente lo studio della funzione

$$x \mapsto ax^2$$

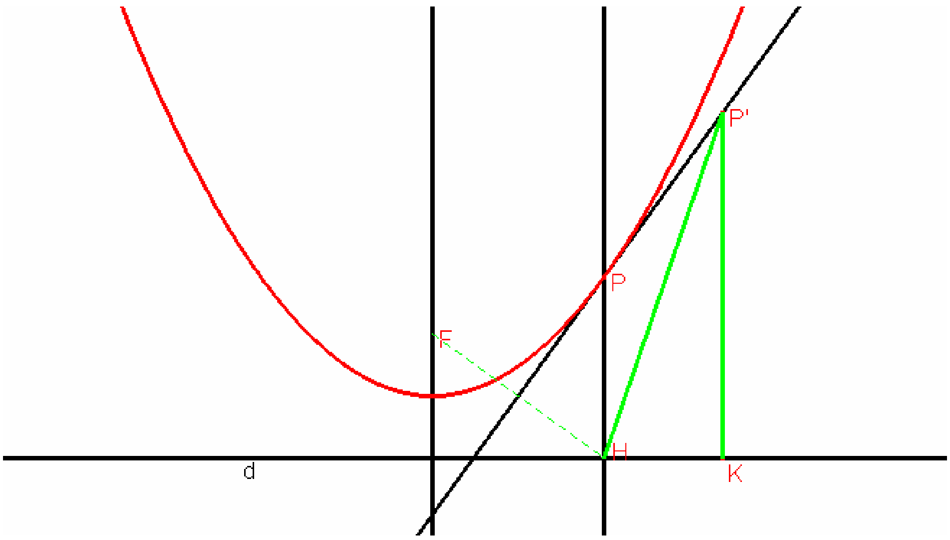
Ottimo modo per introdurre lo studio di curve rappresentate, nel piano cartesiano, da equazioni di grado superiore al primo, a partire da fenomeni fisici, problemi di aree...
Pericolo: il termine “parabola” assume il significato restrittivo di grafico della funzione di secondo grado. **La parabola come luogo di punti non necessariamente coincide con il grafico di una funzione quadratica!**

Parabola come luogo: dati una retta d ed un punto F, luogo dei punti P che hanno ugual distanza da F e da d.

Se scelgo bene il sistema di riferimento mi viene proprio (*provare, è facile!*) l’equazione della funzione di secondo grado, con a = 1/2p, essendo p la distanza di F da d, oppure la forma canonica per i testi di geometria

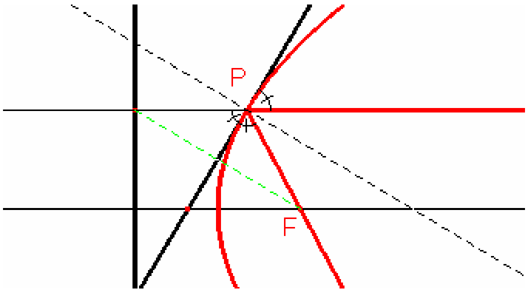
$$y^2 = 2\,\mathrm{p}\,x.$$

Dalla definizione geometrica si ricava:
- la simmetria della curva rispetto alla perpendicolare per F a d (asse della parabola) (non è conseguenza della scelta del riferimento…)
- si può costruire la curva per punti: per ogni punto H su d, trovo un punto del luogo facendo l’intersezione della perpendicolare a d in H con l’asse del segmento FH
- sull’asse del segmento FH non ci sono altri punti della parabola oltre al punto P che sta sulla perpendicolare a d: se P’ appartiene all’asse, P’F = P’H; se K è la proiezione ortogonale di P’ su d, la misura di P’K è la distanza di P’ da d, ma essendo P’H l’ipotenusa di un triangolo rettangolo, è P’H = PF > P’K e quindi P’ non appartiene alla parabola.



- Definiamo **punti interni alla parabola** i punti del piano per cui la distanza dal fuoco è minore di quella dalla direttrice, **esterni** i punti **per cui** la distanza dal fuoco è maggiore di quella dalla direttrice; il ragionamento precedente mostra che per ogni punto H della direttrice, **l’asse del segmento FH ha un solo punto comune con la parabola e tutti gli altri esterni ad essa:** chiamiamolo **tangente** alla parabola
- Ne segue un modo di costruire con la piegatura della carta la parabola come inviluppo delle tangenti (provare! Si segna un punto su un foglio di carta e si piega il foglio in modo di far passare un lato del foglio, meglio il più lungo, per il punto, ripetendo varie volte la piegatura).
- Ne segue anche la “**proprietà focale”** su cui si basano gli specchi e i fari parabolici**: un raggio di luce parallelo all’asse viene riflesso dallo specchio parabolico in un raggio che passa per il fuoco**

7 maggio '08



(nel punto in cui il raggio incide lo specchio, questo è approssimato dalla retta tangente)

Tornando alla forma "comoda"

$$y = a\,x^2$$

osserviamo: poiché a = 1/2p, il segno di a indica se la parabola sta nell'uno o nell'altro dei semipiani individuati dall'asse delle x.
Se spostiamo l'origine degli assi, prendendo come nuova origine il punto (x_0,y_0), in modo che sia

$$x' = x - x_0,\ y' = y - y_0,$$

dall'equazione "comoda" otteniamo la

$$(*)\ \ y'+y_0 = a(x'+x_0)^2 .$$

Nel nuovo riferimento non sono cambiate le direzioni dell'asse della parabola e della sua direttrice; ne deduciamo che una parabola con asse parallelo all'asse delle y (grafico di una **funzione di secondo grado**) ha una equazione del tipo

$$(**)\ \ y = Ax^2 + Bx + C .$$

Possiamo confrontare le due ultime equazioni per ricavare le coordinate del vertice della parabola determinata da (**). Usiamo la tecnica del "completamento dei quadrati" per riscrivere la (**) nella forma

$$y = A(x+\frac{B}{2A})^2 - \frac{B^2}{4A} + C$$

ed ottenere che il **vertice** di (**) ha coordinate $(-\frac{B}{2A}, \frac{-B^2+4AC}{4A})$.

La ricerca dei punti comuni alla parabola (**) e all'asse delle ascisse coincide con la soluzione dell'equazione di secondo grado $Ax^2 + Bx + C = 0$.
Se $A > 0$ e $4AC - B^2 > 0$ (ovvero $B^2 - 4\,AC < 0$) il vertice sta sopra l'asse delle x, quindi non ci sono intersezioni…..
Poiché le intersezioni l'asse della parabola è asse di simmetria, le intersezioni con una retta perpendicolare all'asse di simmetria, in particolare le intersezioni con l'asse delle x, sono tali che il loro punto medio sta sull'asse di simmetria, quindi le loro ascisse hanno come semisomma l'ascissa del vertice: in altre parole, se α, β sono le radici dell'equazione $Ax^2 + Bx + C = 0$, allora $\alpha + \beta = -B/A$.

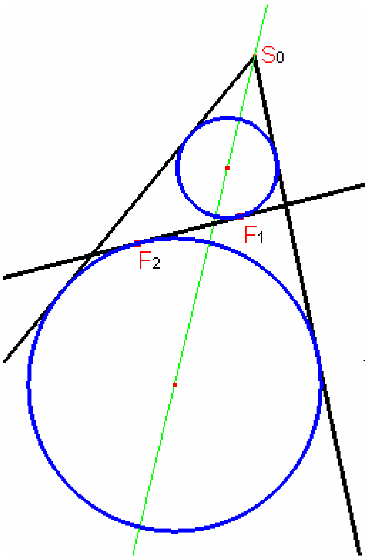
Risolvere una disequazione di secondo grado $Ax^2 + Bx + C > 0$ equivale a individuare i punti di ordinata positiva della parabola di equazione (**); ad esempio, se A < 0, ci sono punti a ordinata positiva se e solo se il vertice ha ordinata positiva, etc…..

Altre curve le cui equazioni si trovano utilizzando relazioni tra distanze:
- circonferenza: punti a distanza costante da un punto costante
- ellisse: punti con somma costante delle distanze da due punti fissi,
- iperbole: punti con differenza costante delle distanze da due punti fissi
- ellisse, parabola; iperbole: punti per cui è costante il rapporto tra le distanze da un punto fisso e da una retta fissa.

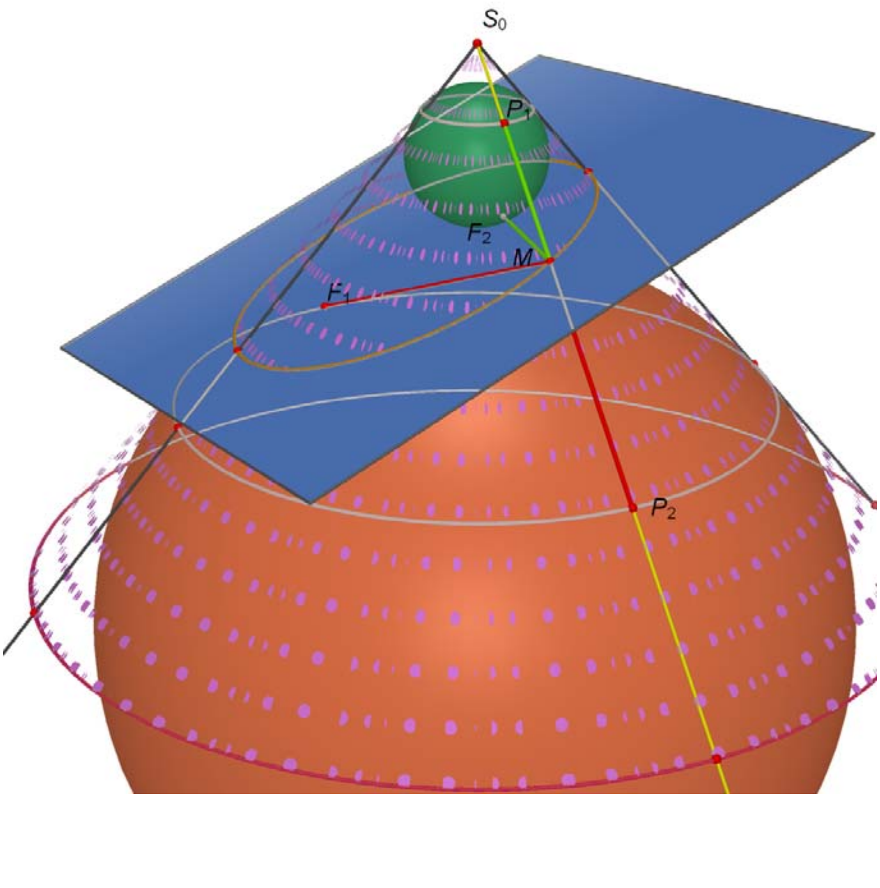
***Attenzione:* che senso ha dare più definizioni o costruzioni se non si comprende il legame tra di esse?**
Dare solo le equazioni? Si rischia che e*llisse, parabola, iperbole* si riducano a nomi di equazioni particolari o a una collezione di formule, a cui non è collegata nessuna immagine mentale.

Errore tipico che segnala la mancanza di connessione con la geometria: per trovare il centro e il raggio della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 12x + 4y = 0$ *"uso le formule: per il centro* (a/2, b/2), *per il raggio radice di* a^2+b^2-4c*….".* Se invece di affidarsi ciecamente alla memoria (che lo tradisce) questo studente pensasse semplicemente alla definizione di circonferenza, e la traducesse in relazione tra coordinate, potrebbe ricavare le coordinate del centro confrontando l’equazione data con quella di una generica circonferenza; se osservasse che l’origine è un punto della circonferenza, il raggio lo troverebbe come distanza del centro dall’origine.

Le sezioni coniche: non banale giustificare il termine “conica”!
Come mostro che un piano che tagli un cono circolare retto secondo una curva chiusa taglia proprio una ellisse? Da **J. Sylvester,** *Geometry, ancient and modern*, Oxford Un. Press, 2001: faccio una sezione con un piano per il vertice S_0 del cono; nell’angolo inscrivo due circonferenze, tangenti in F_1 e F_2 alla retta che è sezione con il piano della conica.



Facendo ruotare i lati dell’angolo e le circonferenze intorno alla bisettrice si ottengono il cono e due sfere, inscritte nel cono, tangenti al piano dato in F_1 ed F_2 . Sia M un punto della sezione del piano con il cono. La retta MS_0 è tangente ad ognuna delle due sfere. Ogni segmento di tangente da M ad una sfera è uguale a MF_1 e ogni tangente alla seconda sfera è uguale a MF_2. Allora la somma MF_1+MF_2 è uguale alla somma dei due segmenti di tangente che stanno sulla semiretta MS_0 , e questa somma è uguale alla distanza dei centri delle due sfere!
La figura è presa dagli esempi allegati al programma Cabri3D.



7 maggio '08

Per riflettere sull'insegnamento della geometria analitica.

1. Un esercizio di dimostrazione: meglio il metodo analitico o il metodo sintetico?
E' data una parabola $\mathcal{P}$ di fuoco F; dimostrare che per ogni retta t tangente a $\mathcal{P}$, il piede della perpendicolare condotta da F a t giace sulla tangente a $\mathcal{P}$ nel suo vertice.
Suggerimenti. Per la dimostrazione con metodo analitico:

1. Scelta del riferimento: il vertice nell'origine, il fuoco F ha coordinate (1, 0) (oppure (0,1)).
2. Ricerca dell'equazione di una tangente generica t.……………………………………………
3. Equazione della perpendicolare a t per F.………………………..
4. Ricerca dell'intersezione tra perpendicolare e t.……………………………………………
5. Verifica dell'appartenenza del punto trovato alla tangente nel vertice.

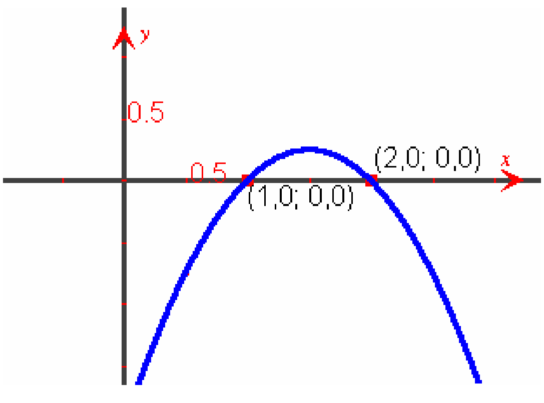
Per via sintetica:

1. Caratterizzazione delle tangenti a partire dalla definizione di parabola
2. Interpretazione del punto comune a tangente e perpendicolare dal fuoco come punto medio ……………….
3. Luogo dei punti medi dei segmenti con un estremo in F e l'altro………………………………………..

Vale anche il teorema inverso?

2. Dagli esercizi del cap. 4 di: Giovanni Prodi - Donata Foà, *Scoprire la matematica. Per il biennio della scuola superiore. Il metodo delle coordinate.* Ghisetti e Corvi ed., 2003.

- **a)** Quante parabole hanno per direttrice una retta data e sono tali che la distanza di tale retta direttrice dal fuoco abbia un valore assegnato?
- **b)** E' dato un punto F ed è fissato un numero positivo k: quante sono le parabole tali che la distanza di F dalla direttrice sia k ? Dove si trovano i vertici di tali parabole?
- **c)** Sono dati la parabola di equazione $y = x^2 - 3x + 2$ ed il fascio di rette parallele di pendenza ½; determinare le coordinate del punto medio delle corde staccate da tale fascio sulla parabola; che figura descrivono questi punti?
- **d)** Risolvere le seguenti disequazioni
  - $x^2 - 2x - 1 > 0$
  - $-x^2 + 6x - 9 < 0$
- **e)** Studiare la funzione $y = |x^2 - 4|$ e tracciarne il grafico.
- **f)** La parabola disegnata qui sotto può avere equazione



A) $y = (x-1)(x-2)$; **B)** $y = (1-x)(x-2)$; **C)** $y = -(x+2)(x-1)$; **D)** $y = -(x+1)(x+2)$

- **g)** La differenza tra due numeri relativi è 10; il loro prodotto è minimo quando i due numeri sono
  A) 10; 0 **B)** –5; –15 **C)** 5; –5 **D)** nessuno di questi

3. In "Matematica 2003" http://umi.dm.unibo.it/italiano/Matematica2003/ , in "Spazio e figure" vedere le attività "Le coniche come luoghi: un percorso costruttivo", "Circonferenze e parabole: dal grafico all'equazione"; "Triangoli equilateri e parabole".
Tra gli esercizi proposti in "Le coniche come luoghi", il n. 10 chiede di studiare come varia l'area dei rettangoli che hanno un dato perimetro e di determinare quello di area massima.