11 giugno 2008

Sistemazioni assiomatiche della geometria euclidea[1]

1. Che cosa è un sistema assiomatico (o teoria assiomatica)?

Da: **Judith N. Cederberg,** *A course in modern Geometries,* second edition, Springer, N.Y., 2001, capitolo 1 (traduzione libera).

Lo studio di qualunque tipo di matematica richiede la comprensione del ragionamento deduttivo; sovente, si è scelta la geometria per introdurre questo metodo agli studenti delle scuola secondaria. Ci sono ragioni storiche importanti per la scelta della geometria a questo fine, ma queste ragioni vengono rivelate raramente a chi frequenta la scuola secondaria[2].
Il ragionamento deduttivo ha luogo nel contesto di una struttura organizzata logicamente, chiamata sistema assiomatico (o deduttivo, o ipotetico-deduttivo). Un sistema assiomatico consiste delle componenti elencate sotto:

1) Termini non definiti (primitivi)
2) Termini definiti
3) Assiomi
4) Un sistema di logica
5) Teoremi.

Si fissano dei termini non definiti (anche detti "primitivi") perché non è possibile definire tutti i termini senza incorrere in rimandi circolari. Nei sistemi geometrici questi termini non definiti includono frequentemente, ma non necessariamente, punto, retta, piano, su.

I termini definiti non sono strettamente necessari, ma in quasi ogni sistema assiomatico si usano ripetutamente certe frasi che contengono dei termini non definiti; perciò, è più efficiente sostituire un nuovo termine, cioè un termine definito, a ciascuna di queste frasi ogni volta che essa compare. Per esempio, in geometria euclidea sostituiamo il termine "rette parallele" alla frase "rette complanari che non si intersecano", la locuzione "triangolo isoscele" alla frase "triangolo con due lati uguali", il termine "rettangolo" alla frase "parallelogrammo con due angoli retti", eccetera.

Inoltre, così come è impossibile definire tutti i termini, è anche impossibile dimostrare tutte le affermazioni, costruite con i termini definiti e non definiti del sistema, senza incorrere in ragionamenti circolari. Dunque si accettano senza dimostrazione le proposizioni di un certo insieme iniziale di enunciati, che vengono detti **assiomi**. Le altre affermazioni vengono dedotte dagli assiomi, cioè, dimostrate usando le regole di inferenza di un **sistema logico** (usualmente, la logica aristotelica). Queste ultime affermazioni vengono chiamate **teoremi.**

L'arbitrarietà della scelta degli assiomi non può essere assoluta, se si vuole una teoria esente da contraddizioni. Un sistema assiomatico è detto **coerente** (o non contradditorio, o, con un anglicismo, consistente) se in esso non è possibile ottenere, per via logica, un teorema ed anche la sua negazione.

Per verificare direttamente la coerenza di un sistema, secondo la definizione, bisognerebbe considerare tutti i possibili teoremi; inoltre, Gödel nel 1931 ha dimostrato che è impossibile dimostrare la coerenza di ogni teoria assiomatica sufficientemente ricca. Per stabilire la coerenza ci si rivolge invece ai modelli. Un **modello** di un sistema assiomatico si ottiene assegnando delle interpretazioni, nell'ambito di un'altra teoria, ai termini non definiti, in modo da convertire gli assiomi in affermazioni vere nelle interpretazioni: se la teoria nella quale si è costruita l'interpretazione è coerente, si ottiene così la dimostrazione della **coerenza relativa** del sistema assiomatico.
Un sistema assiomatico è detto **categorico** se per esso esiste un solo modello (a meno di isomorfismi).

Un assioma, in un sistema assiomatico, è **indipendente dagli altri** assiomi se non può essere dedotto da essi (cioè, dimostrato in base agli altri assiomi). Se ogni assioma di un sistema è indipendente dai rimanenti, il sistema è detto indipendente. Chiaramente, un sistema indipendente è più elegante, poiché non vengono enunciate premesse non necessarie. Poiché, d'altra parte, se si accetta un numero minore di enunciati come dati a priori, se ne deve, di conseguenza, dimostrare un numero maggiore, *può essere conveniente adottare sistemi assiomatici ridondanti, specialmente per fini didattici.*
Anche la verifica dell'indipendenza si fa tramite modelli. L'indipendenza dell'assioma A in un sistema assiomatico S si stabilisce trovando un modello del sistema S' che è ottenuto da S sostituendo ad A la sua negazione A'.
Un sistema assiomatico è **completo** se ogni proposizione, che sia vera in ogni modello, può essere dimostrata.

[1] la locuzione compare nei programmi per il triennio PNI e ITC e progetto IGEA
[2] Il piano di studi scelto dal consiglio FIM della SISS Calabria prevede un modulo dedicato all'uso della storia nella didattica della matematica, quindi non ci occupiamo ora di questa questione.

11 giugno 2008

2. Il sistema assiomatico di Euclide.

Da: V. Villani, *Cominciamo dal punto*, n. 1,2,3,4,8, Robin Hartshorne, *Geometry: Euclid and beyond*, Springer, 2000

Dal Libro 1 degli *Elementi* di Euclide.

Definizioni.
1. Un punto è ciò che non ha parti.
2. Una linea è lunghezza senza larghezza.
4. Una retta è una linea che giace ugualmente rispetto ai suoi punti.
5. Superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza.
7. Un piano è una superficie che giace ugualmente rispetto alle sue rette.
8. Un angolo piano è l'inclinazione reciproca di due linee che si incontrino e non giacciano in linea retta.
10. Quando una retta innalzata a partire da un'altra retta forma con essa angoli adiacenti uguali fra loro, ciascuno dei due angoli è retto, e la retta si dice perpendicolare a quella su cui è innalzata.
23. Parallele sono due rette in uno stesso piano che non si incontrino, per quanto le si prolunghi in ciascuna direzione.

Postulati.
Risulti postulato che:
1. si possa condurre una retta da qualsiasi punto a ogni altro punto
2. si possa prolungare una retta (terminata) continuamente per diritto
3. si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e qualsiasi raggio
4. tutti gli angoli retti sono uguali tra loro
5. se una retta, che interseca due rette, forma gli angoli interni da una stessa parte minori di due angoli retti *(in termini moderni: se la somma degli angoli coniugati interni è minore di un angolo piatto)*, le due rette, prolungate indefinitamente, si incontrino dalla parte in cui sono i due angoli minori di due angoli retti.

Nozioni comuni.
1. Cose uguali ad una stessa cosa sono tra loro uguali.
2. Se a cose uguali si aggiungono cose uguali, si ottengono cose uguali.
3. Se da cose uguali si sottraggono cose uguali, si ottengono cose uguali.
4. Cose che possono essere portate a coincidere sono uguali.
5. Il tutto è maggiore della parte.

Proposizioni.
Limitiamoci (cfr. Villani, *Cominciamo dal punto*, n. 5, pag. 43 e seguenti) alle proposizioni del primo libro degli Elementi, che si conclude con il teorema di Pitagora ed il suo inverso. Le prime tre proposizioni sono costruzioni, così come le proposizioni da 8 a 12, ed altre nel seguito.
Prop. 1. Costruire un triangolo equilatero di lato fissato.
Prop. 2. Dati un punto A ed un segmento BC, costruire un punto L tale che il segmento AL sia uguale al segmento BC.
Prop. 3. Dati due segmenti AB, CD con CD minore di AB, costruire un punto P su AB tale che AP sia uguale a CD.
Prop. 4: primo criterio di congruenza dei triangoli (LAL).
Prop. 5: gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali.
Prop. 6: l'inversa della precedente.
Prop. 7: se due triangoli hanno il lato AB in comune e i vertici C, D dalla stessa parte di AB, se $AC = AD$, $BC = BD$, allora C coincide con D.
Prop. 8: il terzo criterio (LLL).
Prop. 9: costruire la bisettrice di un angolo.
Prop. 10: costruire il punto medio di un segmento.
Prop. 11: dato P sulla retta r costruire una perpendicolare a r in P.
Prop. 12: dato P fuori di r, costruire una perpendicolare a r per P.
Prop. 13: angoli adiacenti o sono entrambi retti o la loro somma è uguale a due angoli retti.
Prop. 14: inversa della precedente.
Prop. 15: angoli opposti al vertice sono uguali.
Prop. 16: un angolo esterno a un triangolo è maggiore di ciascuno degli angoli interni non adiacenti.
Prop. 17: la somma di due angoli di un triangolo è minore di due angoli retti.
Prop. 18: in ogni triangolo a lato maggiore è opposto angolo maggiore.
Prop. 19: inversa della precedente**.**
Prop. 20: disuguaglianza triangolare**.**
Prop. 22: costruire un triangolo, dati i suoi lati.

Prop. 23: trasportare un angolo.
Prop. 24: se due triangoli hanno due lati corrispondenti uguali e l'angolo compreso è diverso, il terzo lato è maggiore dove l'angolo è maggiore.
Prop. 25: inversa della precedente.
Prop. 26: secondo criterio di uguaglianza dei triangoli (ALA).
Prop. 27: se due rette tagliate da una trasversale formano angoli alterni interni uguali, sono parallele.
Prop. 28: estensione della precedente ai casi degli angoli alterni esterni uguali, coniugati supplementari.
Prop. 29[3]: inversa delle prop. 27 e 28.
Prop. 30: proprietà transitiva del parallelismo tra rette
Prop. 31: costruire la parallela ad una retta data per un punto dato.
Prop. 32: la somma degli angoli di un triangolo è due angoli retti, e un angolo esterno è uguale alla somma degli angoli interni non adiacenti.
Prop. 33, 34: proprietà dei parallelogrammi.
Prop. 35: parallelogrammi con la stessa base e compresi tra rette parallele sono equivalenti.
Prop. 37: triangoli con la stessa base compresi tra rette parallele sono equivalenti.
Prop. 38-45: su poligoni equivalenti.
Prop. 46: costruire un quadrato di dato lato.
Prop. 47: Teorema di Pitagora.
Prop. 48: inverso del teorema di Pitagora.

3. Il sistema assiomatica proposto da Hilbert per la geometria euclidea

Nel 1899 David Hilbert pubblica i "Fondamenti di geometria", frutto della sua riflessione sulla geometria euclidea, su cui aveva tenuto dei corsi universitari anni precedenti. Egli riscrive gli Elementi di Euclide tenendo conto delle critiche che nei secoli sono state mosse a questa opera, principalmente a proposito di

- definizioni che richiamano nozioni non chiarite
- uso di assiomi non esplicitati.

Non fa distinzione tra postulati e assiomi (classicamente, il primo termine era riservato a proposizioni di contenuto geometrico) ma si prefigge di elencare tutti i principi strettamente necessari per costruire la teoria. All'inizio non ci sono definizioni, ma c'è l'elenco dei "termini primitivi", o non definiti, della teoria. Ecco le prime frasi del suo testo:

Terminologia.
Consideriamo tre diversi sistemi di oggetti: chiamiamo *punti* gli oggetti del primo sistema e li indichiamo con *A,B,C*...; chiamiamo *rette* gli oggetti del secondo sistema e li indichiamo con *a,b,c*...; chiamiamo *piani* gli oggetti del terzo sistema e li indichiamo con α, β, γ....[...]
Consideriamo punti, rette e piani in certe relazioni reciproche ed indichiamo queste relazioni con parole come "giacere" (o "appartenere"), "fra", "congruente"; la descrizione esatta e completa, ai fini matematici, di queste relazioni segue dagli assiomi della geometria.

Gli assiomi (vedi Villani, *Cominciamo dal punto*, pagine 78,79,80) sono divisi in cinque gruppi:

I. **ASSIOMI DI COLLEGAMENTO** (o appartenenza) che, regolando la relazione di appartenenza tra gli oggetti primitivi vengono da molti indicati come "definizioni implicite" dei termini primitivi**.** Quelli relativi al piano sono:

I.1. Per ogni coppia di punti distinti, *A,B,* esiste almeno una retta *m* per cui *A, B* sono **su** *m.*
I.2. Dati due punti distinti *A,B,* esiste al più una retta *m* tale che *A* è **su** *m, B* è **su** *m.*
I.3. **Su** ogni retta ci sono almeno due punti distinti. Esistono almeno tre punti che non sono **su**lla stessa retta.

II. **ASSIOMI DI ORDINAMENTO,** che stabiliscono il comportamento della relazione "essere tra".

II.1. Se un punto *B* è **tra** i punti *A* e *C,* allora *A, B, C* sono punti distinti sulla stessa retta, e *B* è anche **tra** *C* ed *A* .
II.2. Per ogni coppia di punti distinti *A* e *C,* c'è almeno un punto *B* **su**lla retta *AC* tale che *C* è **tra** *A* e *B.*
II.3. Se *A,B,C* sono tre punti distinti **su**lla stessa retta, allora soltanto uno di essi è **tra** gli altri due.
II.4. Assioma di Pasch. Qualunque sia il triangolo *ABC,* e qualunque sia la retta *m* che non passi per nessuno dei punti *A, B, C,* se *m* passa per un punto del segmento *AB,* allora passa anche per un punto del segmento *AC,* oppure per un punto del segmento *BC.*

Da essi si ricavano le

[3] **la prima proposizione in cui è usato il quinto postulato**

Definizioni:

- *Segmento* di estremi *A, B* è l'insieme di tutti i punti che stanno tra *A* e *B*
- *Semiretta di origine A per B* è costituita da tutti i punti che stanno tra *A* e *B*, dal punto *B* e da tutti i punti *C* tali che *B* stia tra *A* e *C*
- Triangolo, semipiano….
- Angolo *ABC* è costituito dal punto *B* (*vertice*) e dalla coppia di semirette *BA, BC* (*lati*). Lo indichiamo con $\angle ABC$.

III. ASSIOMI DI CONGRUENZA, da cui discende la possibilità di trasportare, sommare, confrontare segmenti, angoli, triangoli (III.6 *è una forma debole del primo criterio di congruenza dei triangoli*).

III.1 (assioma del trasporto). Qualunque siano i due punti *A, B*, e qualunque sia il punto *A'* situato su una qualunque retta *r*, esiste esattamente un punto *B'* su ciascuna delle semirette su *r* con origine *A'* tale che il segmento *AB* è **congruente** al segmento *A'B'*; in simboli: $AB \cong A'B'$.
III.2 (transitività). Qualunque siano i punti *A,B,C,D,E,F*, se $CD \cong AB, EF \cong AB,$ allora $CD \cong EF$.
III.3 (conservazione della somma). Qualunque siano i punti *A,B,C,A',B',C'*, se *C* è tra *A,B*, e *C'* è tra *A',B'*, e se $AC \cong A'C'$, $CB \cong C'B'$, allora $AB \cong A'B'$.
III.4 (trasporto dell'angolo). Qualunque sia l'angolo $\angle ABC$, con i lati non appartenenti ad una stessa retta, e qualunque siano i punti *A', B'*, in ognuno dei due semipiani determinati dalla retta *A'B'* esiste una ed una sola semiretta *B'C'* tale che l'angolo $\angle ABC$ sia congruente all'angolo $\angle A'B'C'$*;* in simboli $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$.
III.5. Ogni angolo è congruente a se stesso.
III.6. Qualunque siano i triangoli *ABC, A'B'C'*, se $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ e $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, allora $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$.

Definizione: due figure sono *congruenti* se esiste tra i loro punti una corrispondenza tale che segmenti corrispondenti siano congruenti, angoli corrispondenti siano congruenti

IV. ASSIOMA DELLE PARALLELE, nella forma detta di Playfair.

IV.1 Per un punto dato *A*, che non è su una retta data *m*, passa al più una retta che non interseca *m*.

V. ASSIOMI DI CONTINUITA'.

V.1 Assioma di Archimede (usato da Euclide senza esplicitarlo). Se *AB* e *CD* sono segmenti arbitrari, allora esiste un numero *n* tale che se il segmento *CD* è riportato *n* volte sulla semiretta *AB* a partire da *A*, allora viene raggiunto un punto *E*, con $n\,CD = AE$, e *B* è tra *A* ed *E*.
V.2 Assioma di completezza lineare. Il sistema dei punti su una retta con le sue relazioni di ordine e di congruenza non può essere esteso in modo che rimangano valide le relazioni esistenti tra gli elementi e le proprietà fondamentali di ordinamento lineare e congruenza risultanti dagli assiomi I-III e V.1.
Non compare la parola "continuità", ma questi due assiomi sono sufficienti per stabilire che i punti di una retta possono essere posti in corrispondenza biunivoca con i numeri reali.

Nota: dall'assioma IV e dai precedenti si ricava **l'unicità** della retta, per un punto dato, parallela ad una retta data. Se si mantengono tutti gli altri assiomi e si sostituisce l'assioma IV con

> **IV'. Assioma iperbolico:** dati una retta *r* ed un punto *P* fuori di essa, esistono almeno due rette per *P* che non incontrano *r*

la teoria che ne risulta è la geometria non euclidea iperbolica (nella quale la somma degli angoli di un triangolo è inferiore a un angolo piatto).
Per ottenere la geometria non euclidea **ellittica** (nella quale la somma degli angoli di un triangolo è maggiore di un angolo piatto) occorre **non soltanto** sostituire l'assioma IV con l'affermazione di non esistenza di rette parallele, ma occorre modificare gli assiomi di ordinamento.

4. Altri sistemi assiomatici per la geometria euclidea.

Molti testi scolastici americani della seconda metà del secolo scorso si basano su un sistema di assiomi dovuto a G. D. Birkhoff, o si ispirano a sistemi derivati da questo ([4]). Birkhoff espose la sua assiomatica in un articolo del 1932 dal titolo "*A set of postulates for plane geometry (based on scale and protractor)*", in italiano "un insieme di postulati per la geometria piana (basato su riga e goniometro)". L'intento palese della proposta è sfruttare le conoscenze pratiche che i ragazzi hanno sulle misure di lunghezze e angoli. Birkhoff prende come termini primitivi (non definiti) *punti, rette,*

[4] J. Cederberg, *A course in modern geometries,* Springer, sec. ed. 2001, appendici

distanza di due punti (che è un numero reale non negativo) e *misura dell'angolo* determinato da tre punti non allineati (che è un numero reale modulo 2π).

Alcuni testi italiani della seconda metà del secolo scorso, e principalmente il libro di Giovanni Prodi "Matematica come scoperta" (D'Anna, 1975, 1977) ([5]) si ispirarono a Birkhoff e al matematico francese Gustave Choquet, che in un testo tradotto in italiano con il titolo "L'insegnamento della geometria" (Feltrinelli, 1967) propose un sistema di assiomi basato sulla nozione di distanza, dando risalto al ruolo delle riflessioni rispetto ad una retta (o a un piano) come isometrie che generano l'intero gruppo delle isometrie del piano (o dello spazio).
Ecco una sintesi degli **assiomi di Choquet per la geometria piana,** da Villani, *Cominciamo dal punto*, pagine 80-81.

Si suppongono conosciuti: *la teoria degli insiemi (comprese le strutture d'ordine), i numeri reali.*

E' dato un insieme, il *piano*, indicato con Π, i cui elementi sono detti *punti*. Nel piano è assegnata una famiglia di sottoinsiemi, detti *rette*.

Assioma I_a.. Per ogni coppia *x, y* di punti distinti esiste una ed una sola retta che li contiene.

Assioma I_b. Per ogni retta *D*, e per ogni punto *x* (appartenente o non appartenente a *D*) esiste una ed una sola retta parallela a *D* passante per *x*.

Assioma II_a. Ad ogni retta sono associate due strutture di ordine totale, opposte l'una dell'altra.

E' quindi possibile definire: *segmento, semiretta.*

Assioma II_b. Date due retta parallele *A*, *B* ed i punti *a, a'* di *A, b, b'* appartenenti a *B*, ogni parallela ad *A*, *B* che incontri il segmento [*a*,*b*] incontra anche il segmento [*a'*,*b'*].

Data una retta D, si definiscono due semipiani di origine D.

Assioma *III*. E' data un'applicazione $d : \Pi \times \Pi \to \mathbb{R}^+$ tale che:
1. per ogni coppia di punti x,y, $d(x,y) = d(y,x)$
2. per ogni retta orientata *D*, ogni punto *x* appartenente a *D* e ogni numero reale $r \geq 0$, esiste un solo *y* in *D* tale che $x \geq y$, $d(x,y) = r$
3. se *x* appartiene al segmento $[a,b]$, allora $d(a,x) + d(x,b) = d(a,b)$
4. per ogni terna di punti non allineati *a, x, b* si ha $d(a,x) + d(x,b) > d(a,b)$.

Si definisce:
- *isometria*
- *piegamento attorno alla retta D*: è una isometria di un semipiano di origine *D* nell'altro semipiano di origine *D*, che tiene fissi i punti di *D.*

Assioma *IV*: per ogni retta *D* esiste almeno un piegamento attorno a *D.*

Si dimostra:
- esiste un unico piegamento attorno a *D*
- un piegamento si estende a una isometria di tutto Π su se stesso (riflessione rispetto a *D*)

Definizione. Una retta *P* è *perpendicolare* alla retta *D* se è diversa da *D* ed è unita nella riflessione rispetto a *D.*

Osservazioni. Le impostazioni assiomatiche basate sulla distanza offrono dei vantaggi non trascurabili:
- non vi sono difficoltà nel definire la congruenza o "isometria",
- non si deve dimostrare la disuguaglianza triangolare, che è data negli assiomi (Villani dedica una delle domande di "Cominciamo dal punto", n. 5, alla difficoltà di dimostrare la disuguaglianza triangolare in Euclide)
- si favorisce la familiarità con il concetto di funzione e di trasformazione geometrica.

Alcuni libri di testo recenti adottano delle commistioni tra diversi sistemi di assiomi. Purtroppo le ottime intenzioni (introdurre presto il concetto di trasformazione, fare maggior appello all'intuizione, sfruttare le conoscenze pregresse)

[5] riscritto recentemente in collaborazione con vari autori, pubblicato da Ghisetti e Corvi nel 2003, con il titolo "Scoprire la matematica".

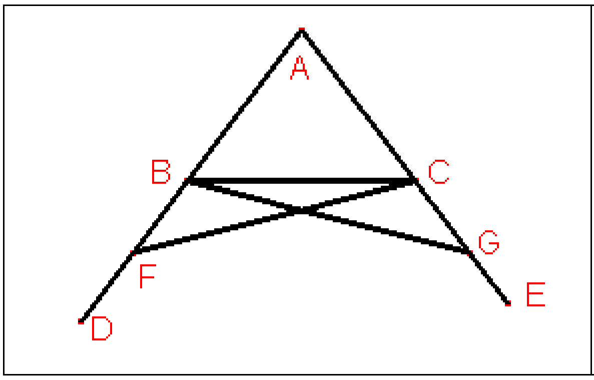
sono spesso vanificate da errori nello sviluppo della costruzione teorica. Non è raro purtroppo rilevare circoli viziosi ed **errori logici**, per esempio quando si danno per acquisite proprietà che sono indipendenti dagli assiomi usati fino a quel momento (e che quindi vanno esplicitate come assiomi) o quando si usano proprietà che non sono state ancora dedotte (dimenticandosi in quale sistema assiomatico ci si trova).
Per l'insegnante che adotti un testo che si ispira a un quadro assiomatico diverso da quello a lui familiare, attenzione al pericolo di fare confusioni! L'essenziale è essere consci di quali sono i presupposti, e controllare puntigliosamente, ad ogni stadio della teoria, che cosa si può usare, al punto in cui ci si trova, e che cosa non è ancora stato dedotto.

5. Spunti di riflessione sulle sistemazioni assiomatiche della geometria euclidea.

A. Può essere interessante (Cederberg, citato all'inizio ed in una nota, lo fa nelle appendici) confrontare le dimostrazioni di una stessa proposizione in due sistemi assiomatici diversi.

Esempio: gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono congruenti.

- In Euclide: dimostrazione della proposizione 5 del primo libro degli Elementi.



Per il postulato 2, si possono prolungare i lati AB, AC, ottenendo AD, AE. Preso F a piacere su BD, per la prop. 3 si può tagliare AE in modo che AG sia uguale ad AF.
Per la proposizione 4 (primo criterio) i due triangoli AFC, ABG sono uguali, quindi FC = BG, l'angolo ACF è uguale all'angolo ABG, l'angolo AFC è uguale all'angolo AGB.
Poiché AF= AG e per ipotesi AB = AC, allora BF = CG; e di nuovo per il primo criterio i triangoli BFC, BGC sono uguali, quindi l'angolo GBC è uguale all'angolo FCB.
Siccome è stato dimostrato che l'intero angolo ABG è uguale a ACF, per differenza di angoli uguali l'angolo ABC è uguale all'angolo ACB

- Nella teoria Hilbertiana: supposto $AB \cong AC$, si utilizza l'assioma di congruenza III 6 (*Qualunque siano i triangoli ABC, A'B'C', se* $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ *e* $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, *allora è anche* $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$) applicandolo ai due triangoli *ABC*, *ACB.*

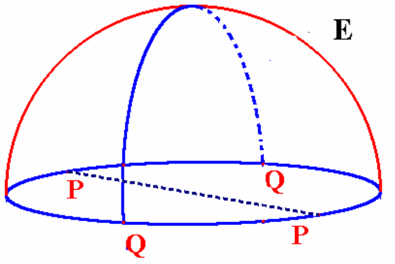
- Choquet (Prodi) definisce "triangolo isoscele" un triangolo con almeno un asse di simmetria.

Dalla definizione segue che due lati hanno uguale lunghezza (per ipotesi la simmetria rispetto alla retta *a* passante per *A* manda il vertice *B* nel vertice *C*; quindi $d(A,B) = d(A,C)$) e che gli angoli adiacenti alla base sono congruenti (perché la simmetria manda l'angolo $\angle ACB$ nell'angolo congruente $\angle ABC$).

B . Sia *S* una superficie sferica. **Verificare** che la relazione "≅" tra punti di *S*, definita da

$$\boxed{x \cong y \quad \text{se} \quad \text{o} \quad x = y, \quad \text{oppure} \quad x \text{ e } y \text{ sono diametralmente opposti}}$$

è una relazione di equivalenza. L'insieme quoziente **E =** ***S*** **/ ≅** è un modello di ***piano ellittico***.
E è rappresentabile come una semisfera in cui il bordo sia incollato su se stesso facendo combaciare punti diametralmente opposti. Nella figura, il punto *P* di **E** è una coppia di punti diametralmente opposti sul bordo; così anche *Q*. Chiamiamo **"rette"** del piano ellittico **E** le immagini dei cerchi massimi di *S* nella proiezione canonica π: $S \rightarrow$ E. Nel disegno sono raffigurate due rette per *Q*.



Verificare che in **E** valgono gli assiomi "di appartenenza":

A.1 Per ogni coppia di punti distinti vi è una sola retta, a cui entrambi i punti appartengono.
A.2 Per ogni retta, esistono almeno due punti distinti che le appartengono.

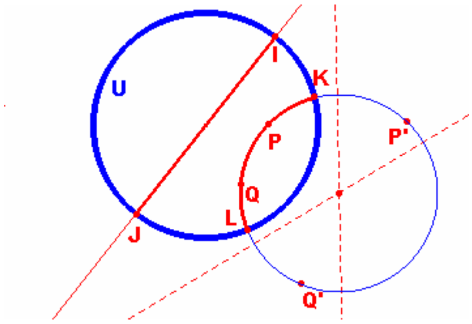
A.3 Esistono almeno tre punti che non appartengono ad una stessa retta.

Verificare che in **E** non è soddisfatto l'assioma IV di Hilbert, ma è soddisfatto **l'assioma ellittico: due rette distinte hanno un punto in comune.**

C. Nel **modello di Poincaré del disco,** *il piano iperbolico H* è costituito dai punti del piano euclideo che sono interni ad una circonferenza fissata *U* ; i punti del bordo di *H* (cioè, i punti di *U*) sono indicati come "*punti ideali*" o "*all'infinito*" o "*punti limite*" ,"*orizzonte*".

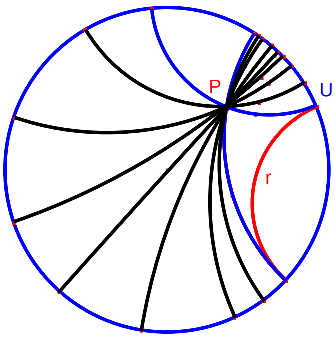
Sono "*rette*" del piano iperbolico le intersezioni di *H* o con le rette per il centro di *U* o con circonferenze ortogonali a *U*.

Nella figura sono tracciate due rette iperboliche, una per il centro di *U*, la quale ha i punti ideali *I*,*J* diametralmente opposti su *U*, ed una retta passante per i due punti *P*,*Q*, con punti ideali *K*,*L*. Questa seconda retta è la traccia in *H* della circonferenza che contiene i punti *P'*, *Q'* trasformati di *P*,*Q* nell'inversione circolare rispetto a *U* .



Verificare che sono validi gli assiomi di incidenza (gruppo I) e l'assioma iperbolico.

Nella figura sono tracciate una retta iperbolica r , un punto P fuori di essa ed alcune rette iperboliche che passano per P e non incontrano r in punti iperbolici (due la incontrano in punto all'infinito).



Per le proprietà dell'inversione circolare e per le costruzioni iperboliche con un software di geometria dinamica rimandiamo al seminario tenuto da G. Indovina il 27 maggio 2008.