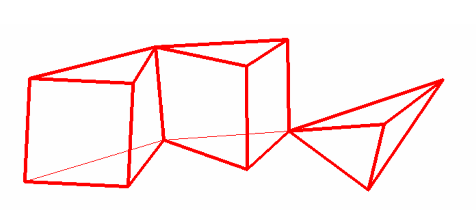
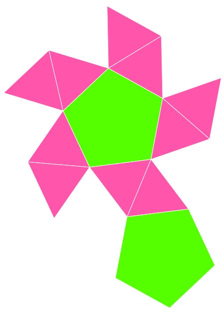
22 maggio ’08

Laboratorio su trasformazioni nello spazio, poliedri regolari

1. Quali e quanti sono i piani di simmetria di un cubo ([1])?
2. Quante e quali rotazioni trasformano un cubo in se stesso?
3. Quali e quanti sono i piani di simmetria di un tetraedro regolare? Quali e quante rotazioni trasformano il tetraedro regolare su se stesso?
4. Costruire (con cannucce, o con pezzi di giochi, o con sussidi didattici) un solido che abbia cinque piani di simmetria.
5. Un cubo ha degli “assi di simmetria”? E un tetraedro?
6. Secondo voi, le figure che seguono mostrano dei poliedri? Motivare le risposte



7. Qui sotto è disegnato lo sviluppo piano[2] di un “*antiprisma pentagonale*”. Che tipo di poliedro è un “*antiprisma*”?



Costruire un esempio di prisma e uno di “antiprisma” quadrati.
8. Costruire esempi di “*deltaedri*”, cioè poliedri le cui facce sono tutte triangoli equilateri uguali tra di loro.
9. I deltaedri sono poligoni regolari? Che cosa è un poliedro regolare?
10. Quanti sono i poliedri regolari?[3]
12. Quale poliedro si ottiene prendendo come vertici i centri delle facce di un ottaedro regolare ([4])? E prendendo come vertici i centri delle facce di un cubo? E se si prendono come vertici i centri delle facce di un tetraedro regolare?
NOTA. Poliedri tali che uno abbia come vertici i centri delle facce dell’altro si dicono **duali.**
13. Visualizzare mentalmente un tetraedro regolare e il suo duale, inscritti l’uno nell’altro. Dilatare il tetraedro più piccolo, tenendone fermo il centro, fino a che i due tetraedri hanno i lati uguali. Il solido ottenuto è un poliedro non convesso, la *“stella octangula”*: provare a disegnarlo ([5]).
14. Scegliete un poliedro convesso (non necessariamente regolare) e calcolate:

- il numero V dei suoi vertici , il numero S dei suoi spigoli , il numero F delle sue facce
- il numero $\chi = V - S + F$.

Confrontate il valore che avete ottenuto per χ con quello ottenuto da altri su altri poliedri. Confrontate i valori di χ per poliedri duali (cubo e ottaedro, icosaedro e dodecaedro).
15. E’ possibile riempire lo spazio con poliedri regolari tutti uguali tra loro, in modo che se due poliedri si intersecano, abbiano in comune o un vertice, o uno spigolo, o una faccia, oppure siano disgiunti?

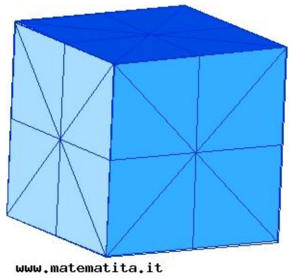
---

[1]per controllo, consultare l’attività per il primo biennio “Simmetrie nei poliedri” in *Matematica* 2003, *Spazio e figure.* http://umi.dm.unibo.it/italiano/Matematica2003/matematica2003.html
[2] Da http://www.peda.com/poly/poly.html
[3]Per questo argomento http://www.matematita.it/personali/index.php?blog=6&cat=40 e per molte immagini e suggerimenti sulla simmetria http://www.matematita.it/
[4] le facce dell’ottaedro regolare sono otto triangoli equilateri uguali tra loro; quelle del dodecaedro regolare sono dodici pentagoni regolari tutti uguali tra loro
[5]figure reperibili in http://kidslink.scuole.bo.it/fardiconto/cabrijava/octang.html; http://www.matematica.it/tomasi/figure3d/

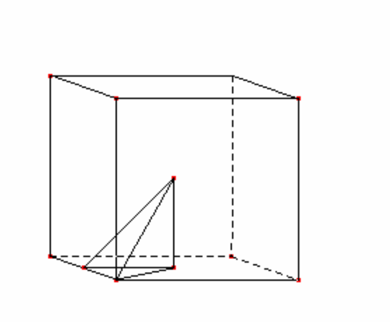
22 maggio ’08

Note sulle attività del laboratorio

1. Vi sono tre piani di simmetria passanti per punti medi di quattro spigoli paralleli, e sei piani di simmetria che passano per due spigoli opposti e per le diagonali di due facce parallele. Con tre specchi, tra loro perpendicolari, aderenti a tre facce di un piccolo cubo, si ottiene l’immagine del cubo di spigolo doppio.
L’immagine qui sotto mostra le tracce lasciate dai 9 piani di simmetria sulle facce del cubo (da http://www.matematita.it/materiale/catalogo.php)

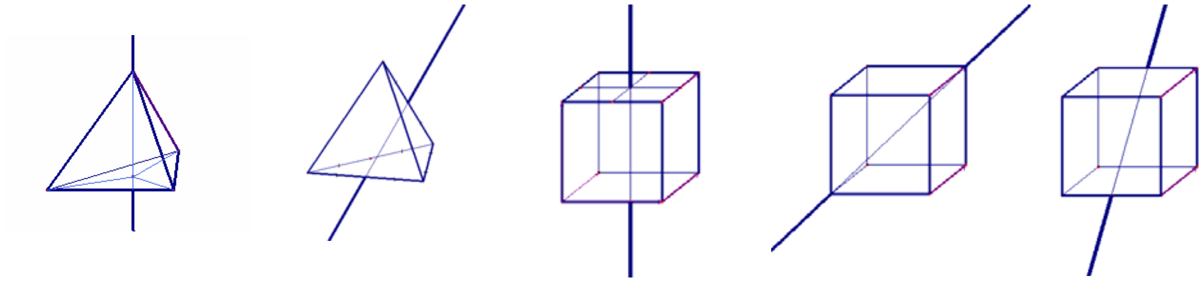


Ogni faccia è decomposta in 8 triangoli rettangoli isosceli; il cubo è decomposto in 48 piramidi, che hanno per base quei triangoli e per vertice il centro del cubo.



Ponendo una di queste piramidi in un caleidoscopio formato da tre specchi, di cui due tra loro perpendicolari, ciascuno dei quali forma con il terzo un angolo di 45°, si ottiene il cubo, anche se solo virtuale:

2, 3. Qui sotto sono raffigurati alcuni degli assi delle rotazioni che trasformano su se stesso il tetraedro regolare oppure il cubo.



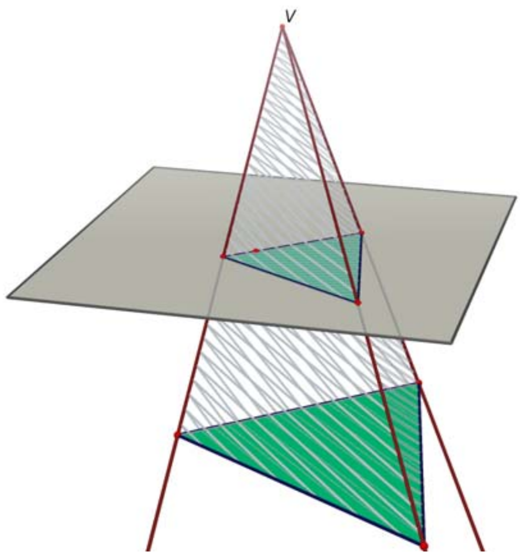
5. “simmetria rispetto ad una retta” è sinonimo di “rotazione di 180°” rispetto a quella retta.
Le attività da 6 a 13 sono ispirate dal paragrafo 21 in V. Villani, *Cominciamo dal punto* (pag. 261): “*Lo studio dei poliedri, e in particolare dei poliedri regolari, offre a tutti i livelli scolastici una serie di spunti che ben si prestano a promuovere un coinvolgimento attivo degli allievi. Perché, specie nelle scuole secondarie superiori, tali spunti non vengono adeguatamente valorizzati?*”
Lo scopo delle attività è richiamare all’attenzione sulla (non semplice) nozione di poliedro: definizioni “ingenue” possono includere casi imprevisti, o casi che non si vogliono considerare nello studio iniziale di questo argomento, come due dei tre esempi raffigurati nell’esercizio 6 del laboratorio. Per evitarli, occorre adottare le definizioni, che riportiamo qui sotto ([6]), innegabilmente “pesanti”: prima si stabilisce come deve essere fatta la superficie che sarà il bordo dell’oggetto da definire, e finalmente si introduce il tipo più familiare di poliedro.

Superficie poliedrale è un sottoinsieme connesso dello spazio, unione di un numero finito di poligoni piani (che si chiamano *facce*), che soddisfa le condizioni:

(a) l’intersezione di due facce, se non è vuota, o è uno spigolo o è un vertice comune alle due facce (gli spigoli e i vertici delle facce sono chiamati *spigoli* e *vertici* della superficie)
(b) ogni spigolo appartiene esattamente a due facce
(c) due facce adiacenti (cioè che si intersecano in uno spigolo) non sono complanari
(d) comunque si fissino un vertice v e due facce f, g che contengono v, esiste una catena di facce f_1, ...f_n , tutte contenenti v, con $f = f_1$, $g = f_n$ e f_i adiacente a f_{i+1} per i = 1, ...n–1

Un **poliedro** è una sottoinsieme limitato dello spazio che ha per bordo una superficie poliedrale.
Poliedro convesso è un poliedro che sia anche un insieme convesso, cioè tale che se due punti P,Q gli appartengono, allora gli appartengono anche tutti i punti del segmento PQ.

Nello studio dei poliedri entra la considerazione degli **angoloidi.** Fissati un punto V e un poligono in un piano che non contiene V, l’insieme delle semirette che hanno origine V e passano per i punti del poligono costituisce un angoloide di *vertice V*. Le semirette che passano per vertici del poligono sono gli *spigoli* dell’angoloide, due spigoli consecutivi determinano un angolo, detto *faccia* dell’angoloide. In particolare, un *triedro* è un angoloide



con tre spigoli e tre facce.

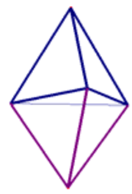
[6] M. Dedò, Forme - Simmetria e topologia, Zanichelli-Decibel, Bologna, 1999, cap. 3, pag. 65

22 maggio ’08

Un poliedro **regolare** è un poliedro convesso le cui facce sono poligoni regolari congruenti, che verifica **una** delle condizioni, tra loro equivalenti:

- tutti i suoi diedri sono congruenti
- tutti gli angoloidi sono congruenti
- tutti i vertici sono circondati dallo stesso numero di facce
- i vertici giacciono tutti su una stessa sfera.

Questo deltaedro (vedi n. **8, 9**), le cui facce sono sei triangoli equilateri congruenti, **non** è un poliedro regolare



Teorema. I poliedri regolari convessi sono solo cinque: tetraedro, cubo, ottaedro, icosaedro, dodecaedro (detti **poliedri platonici**).

Idea della dimostrazione. La somma degli angoli delle facce che concorrono in un vertice deve essere strettamente inferiore a 2π. Poiché il poligono regolare con p lati ha angoli di ampiezza $\pi (p-2)/ p$, se in un vertice concorrono q facce, deve essere $q (p-2) < 2 p$, ovvero $1/p + 1/q > ½$.

Si ricava che (p,q) possono essere solo (3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (5,3). Quindi i poliedri regolari possono essere al più cinque ([7]). Per dimostrare che esistono esattamente cinque poliedri regolari, occorre darne una effettiva costruzione: M. Dedò, in *Forme*, n. 4.4, calcola le coordinate dei loro vertici; Euclide dedica il libro XIII alla costruzione con riga e compasso. Per finire, occorre dimostrare l’unicità delle soluzioni, che è assicurata da un teorema di rigidità dovuto a Cauchy; il lettore interessato consulti R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and beyond*, Springer, 2000, capitolo 8, n. 44, 45, oppure la “bibbia” degli studiosi di poliedri, Peter R. Cromwell, *Polyhedra*, Cambridge University Press, 1997 (ristampato nel 2001 in edizione economica).

14. E’ un’attività suggerita da “Simmetrie nei poliedri” in *Matematica* 2003 (vedi nota 1). Si vuole condurre alla scoperta di una formula (dovuta ad Eulero) che è valida per una classe di poliedri che comprende i poliedri convessi.

Una superficie poliedrale “*senza buchi*” o, in termini tecnici, **semplicemente connessa**, può essere definita in modo intuitivo come una superficie che possa essere deformata con continuità nella superficie di una sfera; in termini più precisi è una superficie poliedrale tale che, comunque si fissi un poligono formato da spigoli della superficie, esso è il bordo di una unione di facce di *S.*

Poliedro semplice è il solido limitato il cui bordo è una superficie poliedrale semplicemente connessa.

Teorema (Eulero, 1752): *per ogni poliedro semplice, detto V il numero dei vertici, S quello degli spigoli, F quello delle facce, vale la relazione*

$$V - S + F = 2.$$

Una dimostrazione simile a quella originale di Eulero si trova in molti testi di scuola superiore, e anche in Villani (21.III, pag. 276 e seguenti), e in M. Dedò([8]).

15. Un risultato sorprendente è il teorema riguardante le “tassellazioni” dello spazio con poliedri regolari: *esiste una sola tassellazione regolare dello spazio, quella mediante cubi* (Villani, pag. 276). Altri tipi di tassellazioni dello spazio sono studiate in cristallografia e in mineralogia, come illustrato ad esempio in E. Vitali, *Poliedri, non solo geometria*, L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol 30, Agosto 2007, pag. 807-816 (interessante tutto il fascicolo di Agosto 2007, dedicato all’insegnamento della geometria).

[7] M. Dedò, Forme, cap. 4, teor. 4.3, pag. 95

[8] M. Dedò, Forme - Simmetria e topologia, Zanichelli-Decibel, Bologna, 1999, cap. 3, teorema 3.3.