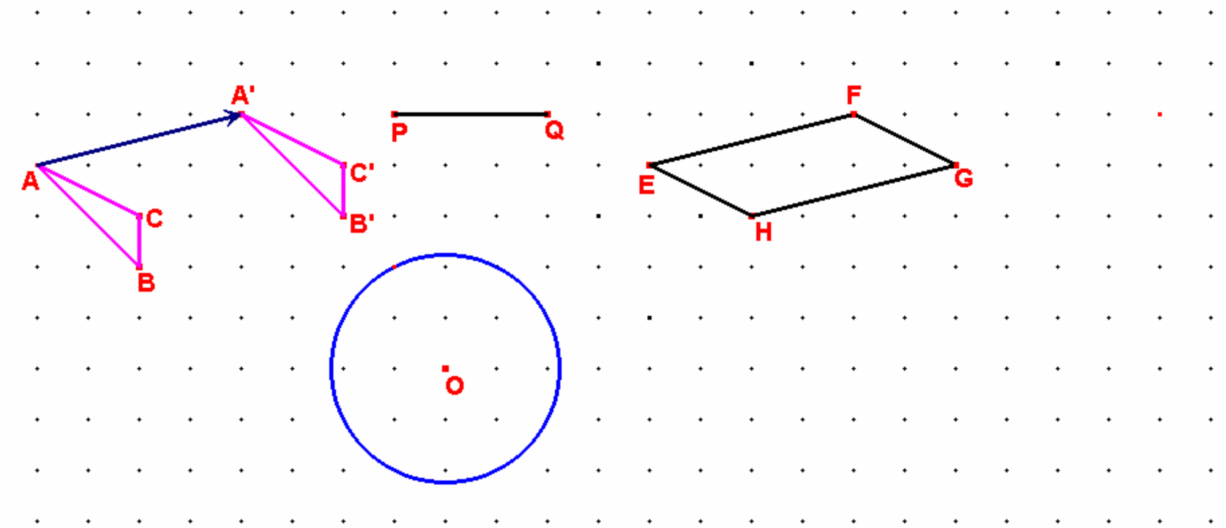
14 maggio ’08

Un approccio costruttivo alle trasformazioni geometriche del piano

Le cosiddette “trasformazioni geometriche elementari” del piano sono corrispondenze bigettive, del piano su se stesso, caratterizzate dalla proprietà di conservare le distanze (e gli angoli); sono indicate perciò anche con il termine tecnico di “isometrie” piane. Gli esercizi che seguono hanno lo scopo di richiamare le definizioni e le proprietà fondamentali di queste ben note trasformazioni del piano in sé.

1. Il triangolo *A’B’C’* è ottenuto dal triangolo *ABC* attraverso la **traslazione di vettore** *AA’*. Disegnare le immagini del segmento *PQ*, della circonferenza di centro *O* e del parallelogramma *EFGH* nella stessa traslazione.

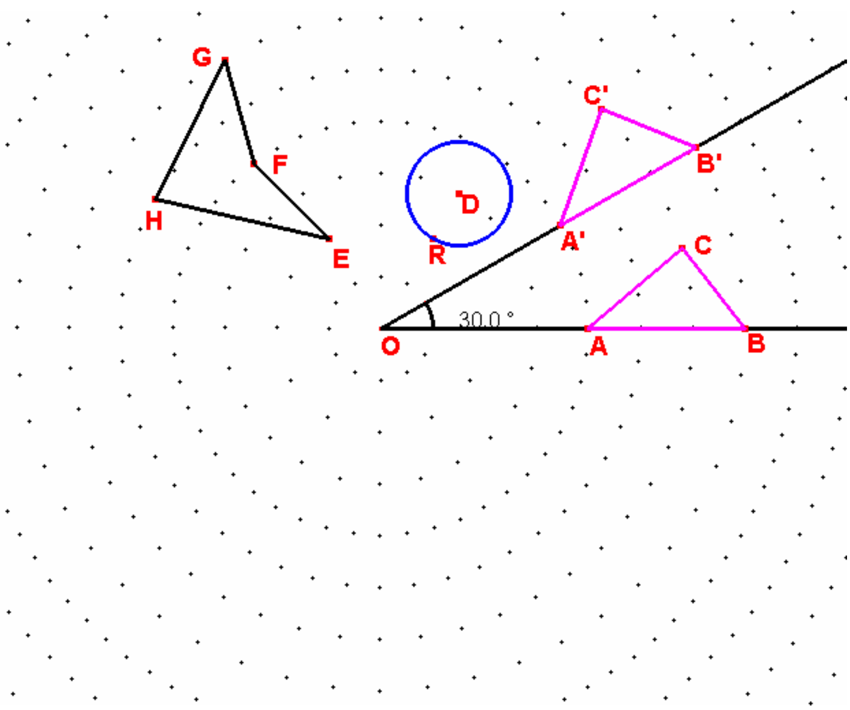


2. Nel piano sono date due rette parallele *r*, *s* . Esiste qualche traslazione che trasformi *r* in *s* ? Se sì, quante?

3. Esiste qualche traslazione che applichi una retta *r* su se stessa? Se sì, quante?

4. Esiste qualche traslazione che applichi una retta *r* su una retta *r’* perpendicolare a *r* ? Se sì, quante?

5. Il triangolo *ABC* è portato nel triangolo *A’B’C’* dalla rotazione di 30° in senso antiorario attorno ad *O*. Disegnare le immagini della circonferenza di centro *D* passante per *R* e del quadrilatero *EFGH* nella stessa rotazione.



14 maggio ’08

6. Nel piano sono date due rette incidenti *r*, *s* . Esiste qualche rotazione che trasformi *r* in *s* ? Se sì, quante?

7. Esiste qualche rotazione che applichi una retta *r* su se stessa? Se sì, quante?

8. Esiste qualche rotazione che applichi una retta *r* su una retta *r’* parallela a *r* ? Se sì, quante?

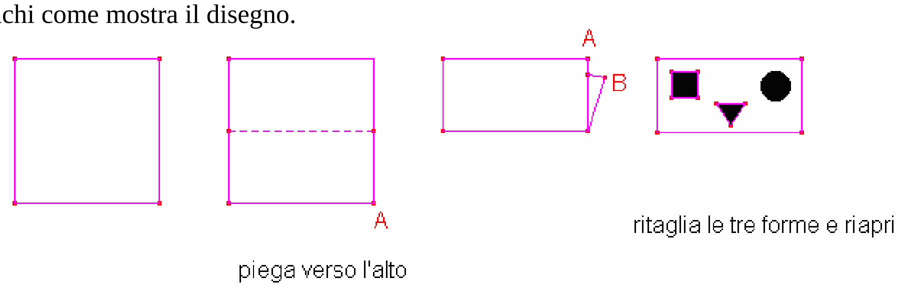
9. Esiste qualche triangolo che è trasformato in se stesso da qualche rotazione (diversa dall’identità)? Se sì, di che tipo di triangolo si tratta, e di quali rotazioni?

10. Esiste qualche quadrilatero non regolare che è trasformato in se stesso da una rotazione (non banale)? Di che tipo di quadrilatero si tratta, e di quale rotazione?

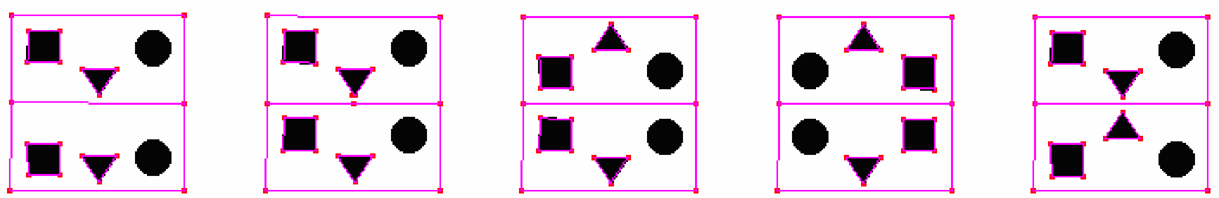
11. Se un quadrilatero è portato su se stesso da più di una rotazione (cioè, da rotazioni con almeno **due** angoli di rotazione **diversi**) che quadrilatero è? Quali sono il centro e le ampiezze di queste rotazioni?

12. Un pentagono può essere trasformato in se stesso da qualche rotazione? Se sì, qual è la rotazione di angolo minimo? Quante sono quelle diverse tra loro?

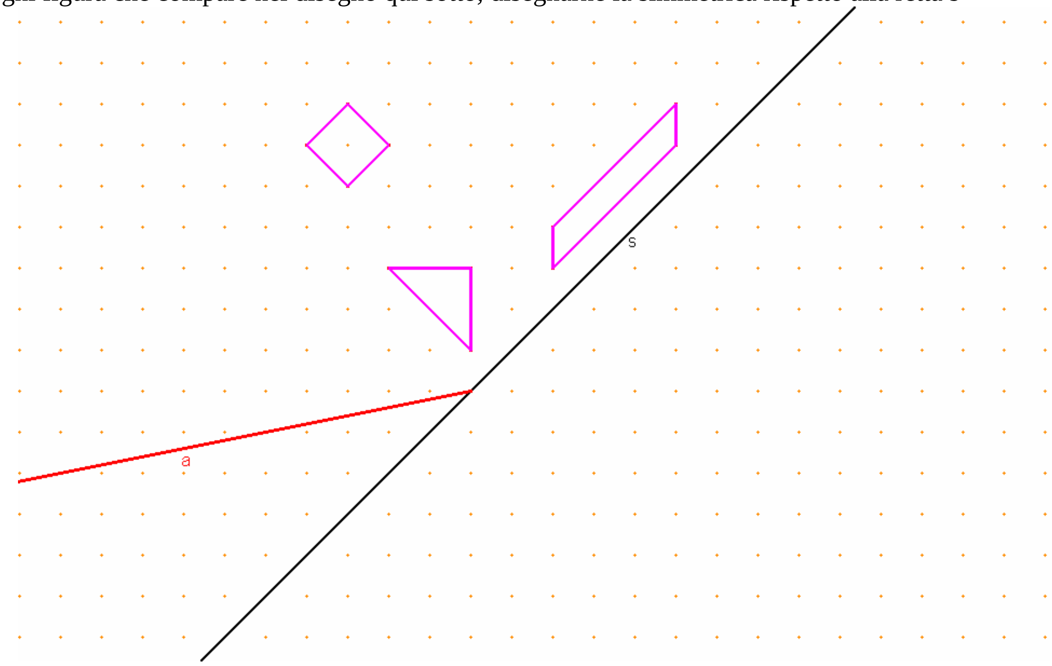
13. Da **Dale Seymour, Visual Thinking, set B, Palo Alto, California, 1983.** Immagina di ripiegare un foglio quadrato e di farci dei buchi come mostra il disegno.



Quando riapri il foglio, quale vedi, tra le cinque figure qui sotto?



14. Per ogni figura che compare nel disegno qui sotto, disegnarne la simmetrica rispetto alla retta s



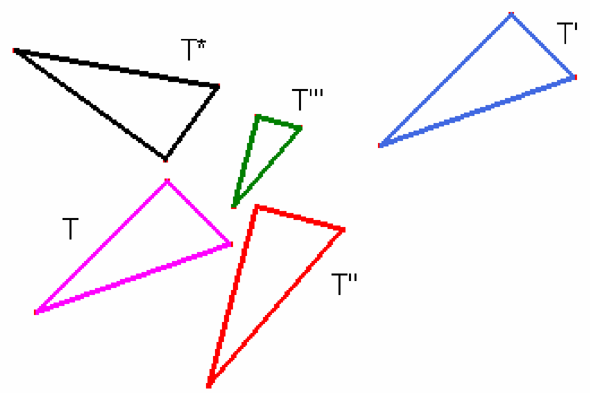
15. Che cosa significa la frase "la figura *F* ha un asse di simmetria"?

16. Quali sono i triangoli dotati di asse di simmetria?

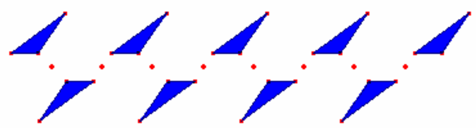
17. Che cosa significa la frase "la figura *F* ha un centro di simmetria"?

18. E' vero o falso che tutti i poligoni regolari hanno un centro di simmetria?

19. Nella figura compaiono vari triangoli T, T', T'', T''', T*. Stabilire se le affermazioni a destra sono vere. *Motivare le risposte, correggendo le affermazioni false!*

	a) T' è ottenuto da T mediante una traslazione
	b) Tutti i triangoli della figura sono uguali (o congruenti, o isometrici)
	c) T* è ottenuto da T con una rotazione
	d) T" è ottenuto da T con una riflessione (simmetria assiale)

20. Sotto a sinistra sono riportati alcuni *fregi*, motivi periodici che riempiono una striscia di piano. Essi sono costruiti sottoponendo una figura a isometrie ripetute. Indicare quali trasformazioni sono necessarie per comporre ciascun dei sei fregi qui sotto

Fregio	Traslazioni	Riflessioni rispetto a un solo asse	Riflessioni rispetto ad assi paralleli	Riflessioni rispetto ad assi perpendicolari	Simmetrie centrali
					
					
					
					
					
					

Un settimo tipo di fregio, diverso dai precedenti, si ottiene applicando al motivo base (qui l'orma di un piede sinistro) la trasformazione detta **glissosimmetria o glissoriflessione (antitraslazione),** che è definita come il prodotto di una simmetria assiale con una traslazione parallela all'asse di simmetria.

Teorema di classificazione: *ogni isometria del piano appartiene ad una sola delle classi seguenti:*

- *se ci sono infiniti punti uniti*
  - ***trasformazione identica*** (tutti i punti sono uniti)
  - ***riflessione rispetto ad una retta*** (ogni punto della retta è unito)
- *se c'è un punto unito soltanto*
  - ***rotazione***
- *se non ci sono punti uniti*
  - ***traslazione***
  - ***antitraslazione.***

Nel testo di Maria Dedò, *Trasformazioni geometriche*, Decibel-Zanichelli, Bologna, 1996, il teorema di classificazione è dimostrato utilizzando il
Teorema: *ogni isometria piana è prodotto di al più 3 riflessioni.*

Un'isometria f del piano è *diretta*, o ***mantiene l'orientazione***, se dato un qualsiasi triangolo T di vertici A,B,C scelti in modo che l'ordinamento A,B,C faccia percorrere il bordo del triangolo in verso antiorario, anche l'ordinamento $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ fa percorrere il triangolo $f(T)$ in verso antiorario.

Il teorema di **classificazione** si riassume quindi nella tabella:

Isometria piana	**Infiniti punti fissi**	**Un punto fisso**	**Nessun punto fisso**
Diretta (pari[1])	identità	rotazione	traslazione
Non diretta (invertente, dispari[2])	riflessione	- -	glissosimmetria

Per considerazioni didattiche sull'uso delle trasformazioni geometriche, raccomandiamo V. Villani, *Cominciamo dal punto*, n. 18, pag. 205-223.
Una presentazione panoramica dell'argomento può essere trovata negli appunti del settimo ciclo http://www.mat.unical.it/~daprile/materiali/settimociclo/trasfsettimo.ppt

Discussione:

A) nel ruolo di studente:

quali nozioni già note ho avuto modo di ricordare con questa attività didattica?
Ho imparato qualcosa che non sapevo? Che cosa?

B) nel ruolo di docente:

in questa proposta didattica ho notato delle carenze?
Difetti?
Errori?
Come si potrebbe correggere e migliorare questo tipo di attività?

Osservazioni su alcuni esercizi.

2. Date due rette parallele r, s, sia R un punto qualsiasi su r ed R' un punto su s. La traslazione che manda R in R' manda r su s. Esistono quindi infinite traslazioni che mandano r in s .

3. Ogni traslazione individuata da un vettore parallelo a r applica r su se stessa.

[1] ottenibili componendo un numero pari di riflessioni rispetto a rette
[2] ottenibili dalla composizione di un numero dispari di riflessioni

4. Non è possibile traslare un retta in una che non sia parallela ad essa.

6. Ci sono infinite rotazioni che portano una retta *r* su una retta *s*, incidente ad *r*: non soltanto le due rotazioni che hanno come centro il punto comune alle due rette (una di angolo *a* uguale al minore tra gli angoli delle due rette, l'altra di angolo $a + \pi$, entrambe in senso antiorario) ma anche tutte le rotazioni che si ottengono componendo le precedenti con una delle infinite traslazioni che mandano *s* su se stessa, oppure che si ottengono componendo una traslazione che manda *r* su se stessa con una rotazione attorno al punto comune ad *r* e *s*.

7. Oltre all'identità, tutte le rotazioni di π con centro in un punto qualsiasi della retta.

8. Poiché una rotazione di angolo *a* applica una retta *r* su una retta *r'* che forma con *r* un angolo uguale ad *a*, soltanto le rotazioni di angolo uguale a π mandano una retta *r* in una retta parallela ad essa.

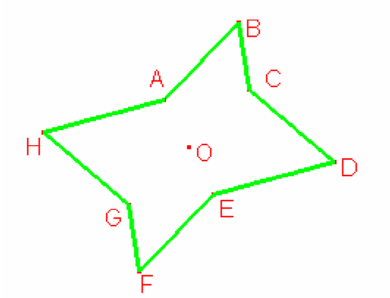
10. Ogni parallelogramma è portato su se stesso dalla rotazione di π attorno al punto comune alle sue diagonali.

11. Un quadrilatero che sia trasformato su se stesso da più di una rotazione deve essere un parallelogrammo con due lati consecutivi uguali e con diagonali uguali: dunque un quadrato. Le rotazioni che lo trasformano in sé hanno centro nel punto comune alle diagonali; gli angoli di rotazione sono $\pi/2$, π, $3\pi/2$.

12. Occorre che tutti i lati e tutti gli angoli siano uguali tra loro. Il pentagono regolare è trasformato su se stesso dalle rotazioni di $2\pi/5$, $4\pi/5$, $6\pi/5$, $8\pi/5$ attorno al centro della circonferenza circoscritta ad esso.

15. Una figura piana *F* ha un asse di simmetria se esiste una retta *a* tale che la riflessione (o simmetria assiale) rispetto ad *a* applichi *F* su se stessa.

17. Una figura piana *F* ha un centro di simmetria se esiste un punto *O* tale che la rotazione di π attorno a *O* applichi *F* su se stessa; in altre parole, il centro di simmetria *O* è un punto con la proprietà che, per ogni punto $P \in F$, esiste un punto $P' \in F$ tale che *O* sia il punto medio tra *P* e *P'*.
Il poligono ABCDEFGH della figura qui sotto ha il centro di simmetria O; si può anche dire che è "simmetrico rispetto ad O".



18. Falso. Solo i poligoni regolari con un numero pari di lati hanno un centro di simmetria.

19. Soltanto l'affermazione a) è vera: infatti, congiungendo vertici corrispondenti dei triangoli T e T' si ottengono segmenti paralleli, concordemente orientati e congruenti.
I segmenti che congiungono vertici di T e T* corrispondenti (in quanto vertici di angoli congruenti) sono paralleli e i loro punti medi giacciono tutti su una stessa retta, perpendicolare a tutti i segmenti; questa retta è l'asse della riflessione che porta T in T*.
Poiché T e T'' sono concordemente orientati, non possono corrispondersi in una riflessione o glissoriflessione; siccome le coppie di lati che appaiono congruenti non sono parallele, l'isometria che porta il primo triangolo sul secondo deve essere (per esclusione) una rotazione. Gli assi dei segmenti che hanno come estremi vertici corrispondenti di T e T'' passano, quindi, per uno stesso punto, centro della rotazione che porta T in T''.