28 maggio ’08

Trigonometria e mondo reale

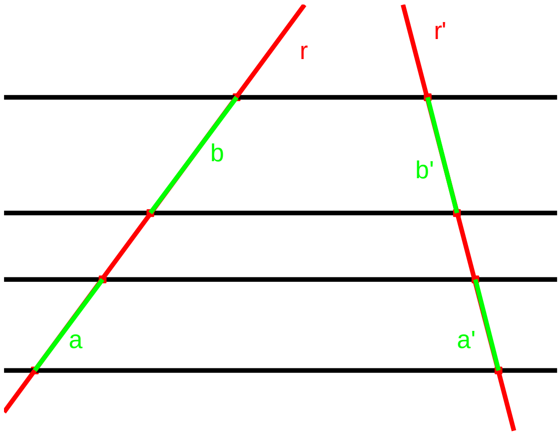
1. Premessa. Richiami sulla similitudine.

1.1. Percorso tradizionale (ad esempio, si veda il classico testo per i licei di Enriques e Amaldi, o quello molto diffuso di Palatini e Dodero).

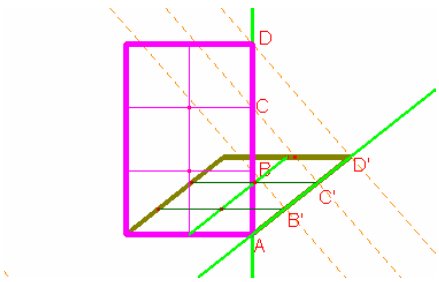
Due figure sono *simili* se è possibile far corrispondere punti dell’una a punti dell’altra in modo che angoli corrispondenti siano uguali e segmenti corrispondenti siano proporzionali.
Per i triangoli, valgono i *criteri di similitudine*:
Primo criterio: *se due triangoli hanno ordinatamente uguali gli angoli* (cioè, se esiste una corrispondenza tra gli angoli tale che angoli corrispondenti siano uguali) *allora sono simili.*
Secondo criterio: *se due triangoli hanno un angolo uguale e i lati che lo comprendono proporzionali allora sono simili.*
Terzo criterio: *se due triangoli hanno i lati ordinatamente proporzionali allora sono simili*.

I tre criteri sono conseguenza del famigerato **teorema di Talete**. Come osserva Villani (*Cominciamo dal punto*, n. 15, pag. 174): ci sono varie formulazioni del teorema di Talete. Ne diamo una, cercando di esplicitare chiaramente le ipotesi:

> dati una retta e l’insieme delle sue parallele (un *fascio* di rette parallele), fissate due rette *r*, *r’* non appartenenti al fascio (*trasversali*), se ad ogni segmento *a* su *r* si fa corrispondere il segmento *a’* di *r’* tagliato dalle stesse rette del fascio, allora una coppia qualsiasi (*a*,*b*) di segmenti su *r* e la coppia corrispondente (*a’*,*b’*) su *r’* sono in proporzione, cioè *a* : *b* = *a’* : *b’* .



L’esperienza dell’osservazione delle ombre può essere usata per *giustificare* l’introduzione di questo teorema, come suggerito da Emma Castelnuovo in “*Pentole, ombre, formiche*”, La Nuova Italia, ristampa 1998, pag. 71 e seguenti. I raggi del sole, che sono paralleli, generano una corrispondenza tra le griglie di un cancello e le loro ombre. Se il cancello è a griglie quadrate, le ombre delle griglie non sono quadrate; tuttavia le ombre delle griglie tagliano in parti uguali l’ombra del lato esterno:



La *dimostrazione* del teorema di Talete non è semplice; spesso si preferisce accontentarsi di dimostrare il primo passo:

> *a segmenti uguali su una trasversale corrispondono segmenti uguali sull’altra.*

Usando questo “primo passo” si dimostra che *il segmento che unisce i punti medi di due lati di un triangolo è parallelo al terzo lato, ed è uguale alla metà di questo.*

Questa proprietà dei triangoli è un caso particolare del più generale
Corollario del teorema di Talete: *se una retta taglia due lati di un triangolo in modo che due coppie di segmenti tagliati su quei lati siano in proporzione, allora la retta è parallela al terzo lato del triangolo.*

1.2. Percorso alternativo (V. Villani, *Cominciamo dal punto*, n. 18.I, pag. 207).

Le ***similitudini*** sono le trasformazioni f che alterano le lunghezze dei segmenti (o le distanze tra le coppie di punti) secondo un fattore numerico costante $k > 0$. Indicata con $d(A,B)$ la distanza dei punti A, B, si ha quindi che f è una similitudine se e solo se è, per ogni scelta di A, B,

$$d(f(A), f(B)) = kd(A,B) .$$

Per $k = 1$ si hanno le isometrie.

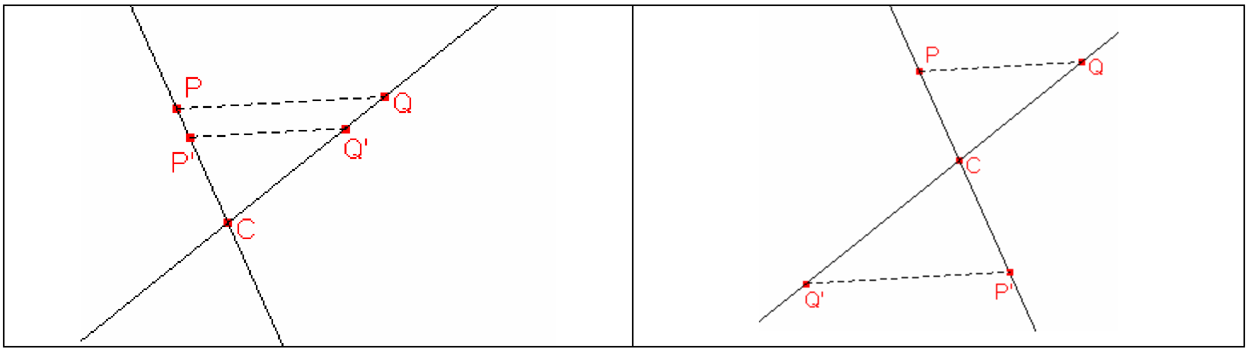
Dalla definizione segue:

1. le similitudini sono applicazioni iniettive
2. le similitudini conservano l'allineamento dei punti ([1])
3. componendo una similitudine di rapporto k con una di rapporto h si ottiene una similitudine di rapporto hk.
4. Le similitudini formano un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni, di cui le isometrie sono un sottogruppo.
5. Una similitudine f manda la circonferenza di centro C e raggio r sulla circonferenza di centro $f(C)$ e raggio kr.

Un tipo particolare notevole di similitudine è l'omotetia. Fissato nel piano un punto C, l' ***omotetia di centro C e rapporto λ*** ($\neq 0$) è l'applicazione del piano in sé che fissa C e ad ogni punto $P \neq C$ associa il punto P' tale che

- $d(P',C) = |\lambda|\, d(P,C)$
- se $\lambda > 0$, P' sta sulla semiretta di origine C che contiene P, se $\lambda < 0$, P' sta sulla semiretta opposta.

In particolare, per $\lambda = 1$ si ottiene l'identità, per $\lambda = -1$ si ha la *simmetria centrale* (rotazione di 180°, o *mezzogiro*).
La figura a sinistra mostra i corrispondenti P', Q' di due punti P, Q in un'omotetia di rapporto 3/4; la figura a destra, in un'omotetia di rapporto $-1{,}25$.



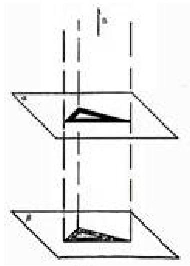
Si dimostra che ogni similitudine può essere ottenuta come prodotto di una omotetia e una isometria.

Tra i molti modi di *motivare* l'introduzione delle trasformazioni geometriche, ricordiamo ancora l'osservazione delle ombre di una stessa figura piana, per esempio un telaio quadrato o triangolare (le prime due figure sono tratte dall'articolo di Marta Menghini, in www.treccani.it/site/Scuola/Zoom/prospettiva/scuola_zoom.htm).

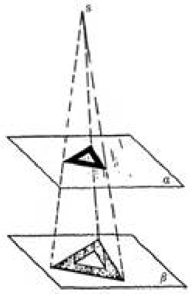
[1] B appartiene al segmento di estremi A, C se e soltanto se $d(A,B) + d(B,C) = d(A,C)$; se f è una similitudine, da questa eguaglianza si ricava l'analoga eguaglianza relativa ai punti $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$.

28 maggio ’08

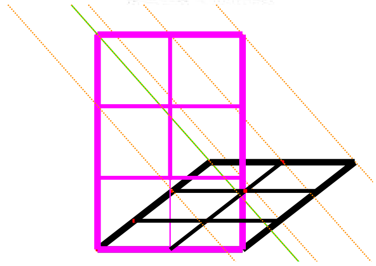
Se i raggi del sole hanno direzione esattamente perpendicolare al piano della figura e l’ombra è proiettata su un piano parallelo a quello della figura, allora lati ed angoli corrispondenti nella figura e nell’ombra sono uguali: la trasformazione tra le due è di tipo “*euclideo*” (è una *isometria*)



Se la luce proviene da una lampada posta sulla verticale, la figura orizzontale e la sua ombra, su un piano pure orizzontale, hanno ancora angoli corrispondenti uguali, ma lati di lunghezze alterate tutte nello stesso rapporto: le due figure sono *simili.*



L’ombra, prodotta dai raggi del sole, di una finestra a maglie quadrate su un piano non parallelo al piano della finestra è un reticolato di parallelogrammi: distanze ed angoli non sono conservati, però lati paralleli hanno ombre parallele. La trasformazione tra le due figure è una *affinità*.



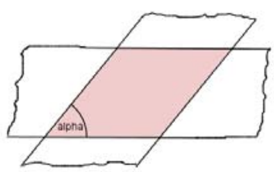
Si definiscono **simili** due figure quando c’è una similitudine che trasformi una nell’altra.
In particolare *due triangoli sono simili*, per definizione, *se sono trasformati l’uno nell’altro in una similitudine.* Dalle proprietà che caratterizzano la similitudine segue che triangoli simili *hanno gli angoli ordinatamente uguali e lati proporzionali*.

Come doveva essere, i due diversi percorsi portano a definizioni *equivalenti* di “triangoli simili”.

2. “La trigonometria e il mondo reale”, in http://umi.dm.unibo.it/italiano/Matematica2003/matematica2003.html

Esaminiamo le varie fasi dell’attività contenuta in “Matematica 2003”, che è aderente non solo alle proposte dell’UMI ma anche al dettato dei programmi PNI: “definizione geometrica di seno e coseno”. Discutiamo gli esercizi proposti nell’attività, e anche uno dei problemi proposti dal prof. E. Pontorno il 23 maggio ’08.

Problema. Le due strisce di altezza 1 sono sovrapposte come in figura. Noto l’angolo *alpha*, qual è l’area del parallelogrammo che costituisce l’intersezione delle due strisce?



(**R**: 1/sin(*alpha*))