13 giugno ’08

Uso delle trasformazioni geometriche del piano.

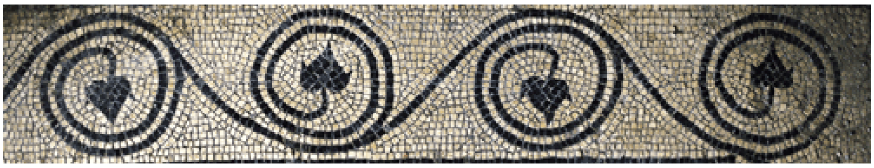
Letture consigliate: V**.** Villani, *Cominciamo dal punto,* n. 18 (pag. 205-223) n. 20.I , 20.II (p.250-255)
M. Dedò, *Forme – Simmetria e topologia*, Zanichelli, 1999, cap. 2 e 7.

1. Fregi.

Abbiamo già usato il termine *fregio* per indicare una striscia di piano (intersezione non vuota di due semipiani con origini parallele) che è ricoperta dalle copie ripetute di un motivo “base” o “fondamentale”. Le copie sono ottenute reiterando delle isometrie, una delle quali è necessariamente una traslazione nella direzione della striscia.

1. Quali trasformazioni sono state usate per ottenere, partendo dal disegno di un’impronta di piede, il fregio disegnato qui sotto?

2. Quale è il motivo base e quali trasformazioni sono state usate per ottenere questi fregi (da http://www.matematita.it/materiale/catalogo.php)?



3. La considerazione dei due fregi precedenti conduce a riconoscere una proprietà della composizione di simmetrie centrali e una, analoga, della composizione di simmetrie assiali con assi paralleli. Di quali proprietà si tratta? Dimostrare le proprietà individuate.

2. Tassellazioni e tappezzerie.

Villani definisce così le pavimentazioni o tassellazioni piane (pag. 254): *una **tassellazione** (o pavimentazione) del piano è una collezione di poligoni la cui unione è tutto il piano, con l’ulteriore proprietà che l’intersezione di due poligoni, quando non è vuota, debba essere un vertice o un lato comune ai due poligoni. Se la tassellazione è formata da poligoni regolari tutti uguali tra loro si parla di **tassellazione regolare**.*

Lo studio delle tasselazioni può essere una buona attività di “problem solving”, da affrontare in tre fasi: esplorazione, formazione di congetture, dimostrazioni (si veda l’attività “Tassellazioni del piano” nel nucleo “Spazio e figure” in http://umi.dm.unibo.it/italiano/Matematica2003/matematica2003.html)

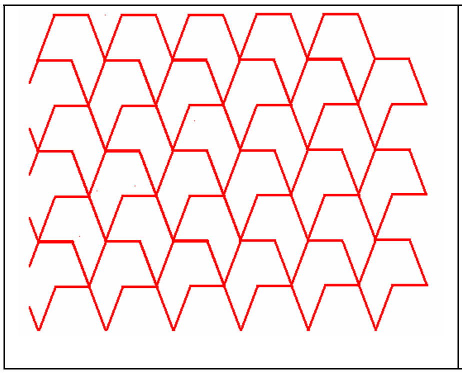
1. Quali sono le tassellazioni regolari del piano?

2. Esistono tassellazioni del piano con parallelogrammi tutti uguali? Con triangoli scaleni?

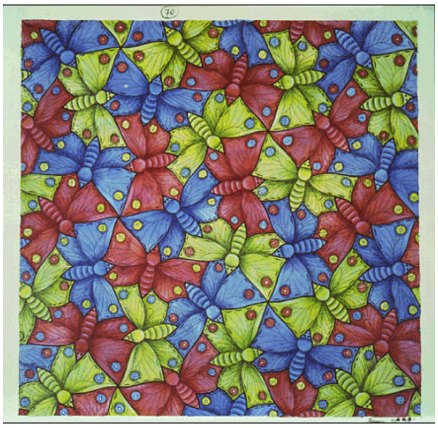
3. E’ possibile pavimentare il piano con quadrilateri non regolari (tutti congruenti)?

Se alla piastrella poligonale si sostituisce un motivo ornamentale, che venga ripetuto in modo tale che tutte le copie si incastrino ricoprendo il piano si ottiene un **“mosaico” (o tappezzeria).**

4. Quali isometrie sono state usate per costruire i due mosaici qui sotto? Quello a destra è di M. C. Escher; la risposta varia a seconda che si tenga conto o no delle differenze di colore.



5. Se si prescinde dai colori, si può dire che questo disegno di Escher è un mosaico costruito sottoponendo il motivo della farfalla a rotazioni, e traslazioni. Individuare centri e ampiezze di queste rotazioni.



6. Disegnare una tappezzeria utilizzando soltanto simmetrie centrali.

3. Isometrie di una figura. Classificazione dei poligoni.

Secondo Villani (pag. 250) si chiamano **isometrie di una figura** quelle isometrie che la trasformano in se stessa (la figura coincide in senso insiemistico con la figura trasformata); altri autori, come M. Dedò in “*Forme*”, pag. 8, danno a questo insieme (gruppo) di trasformazioni il nome di **simmetrie di una figura.**

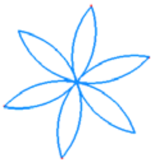
1. Dimostrare il **Teorema** (Villani, pag. 250**.** Le isometrie di un poligono formano un gruppo finito.

Suggerimento: le isometrie che conservano il poligono devono rimescolare i vertici del poligono, dunque ……..

La parola “simmetria” assume dunque vari significati a secondo del contesto, il che può dare luogo ad equivoci. Nelle Scienze Naturali è abbastanza diffusa la definizione:

> si dice che una figura piana f ha **una simmetria rotazionale** se f coincide con la sua trasformata in una rotazione (diversa dall’applicazione identica): ciò significa che ogni punto P di f viene portato dalla rotazione in un punto P' che pure appartiene a f.

La figura f **ha una simmetria rotazionale di ordine *k*** se k è il più piccolo intero per cui, ripetendo k volte la rotazione di angolo minimo (diverso dall’angolo nullo) che conserva f, ogni punto P della figura ritorna su se stesso.
Il disegno qui accanto mostra una figura dotata di simmetria rotazionale di ordine 6.

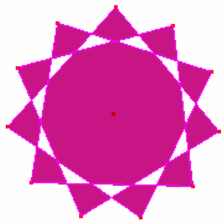
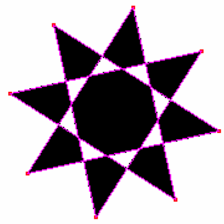


2. Quali triangoli sono dotati di simmetria rotazionale, e qual è l’ordine della simmetria?

3. Quali quadrilateri hanno simmetria rotazionale, e di che ordine di simmetria?

4. Quali pentagoni hanno simmetria rotazionale, e di che ordine?

5. I due poligoni intrecciati della figura che segue sono dotati di simmetria rotazionale? Se sì, di che ordine, rispettivamente? Hanno un centro di simmetria?

6. Che tipo di simmetria rotazionale ha il riccio di mare (a sinistra), e quale il fiore di melo (a destra)? (Immagini da www.matematita.it/)

7. Dire quale sia il numero degli elementi del gruppo delle isometrie di un triangolo in ciascuno dei casi:
    a. il triangolo è scaleno
    b. il triangolo è isoscele
    c. il triangolo è equilatero.

8. Ricavare dall’esercizio 6 il **teorema di classificazione dei triangoli (**Villani, pag. 253).

9. **Classificare i quadrilateri convessi** in base alle loro isometrie (Villani, pag. 253): un quadrilatero convesso è
    a. un quadrato se e solo se…………
    b. un rettangolo se e solo se………..
    c. un rombo se e solo se …………….
    d. un trapezio isoscele se e solo se……
    e. un deltoide se e solo se…..
    f. un parallelogramma se e solo se……

10. (Da Polya, How to solve it, Princeton Univ. Press, ed. 2004, pag. 234) Sono dati un esagono regolare ed un punto nel suo piano. Condurre una retta per il punto, che divida l’esagono in due parti di uguale area.

11. Porre un problema che generalizzi il problema precedente.

12. Determinare le isometrie della pavimentazione regolare del piano con triangoli equilateri.

13. Determinare le isometrie della pavimentazione regolare del piano con quadrati.

14. Determinare le isometrie della pavimentazione regolare del piano con esagoni.

15. Quali isometrie trasformano su se stessa una pavimentazione con quadrilateri non regolari (tutti uguali)?

Note.

1. Fregi.

La proprietà considerata nel problema 3 riguarda la possibilità di ottenere una traslazione o come composizione di due simmetrie centrali, o come composizione di due simmetrie assiali, con assi paralleli. Nel primo caso, si dimostra (ricorrendo al noto “corollario del teorema di Talete”) che, per ogni punto *P*, il segmento orientato con primo estremo *P* e secondo estremo *P’’*, immagine di *P* nella composizione delle simmetrie di centri *O, O’*, è parallelo ad *OO’* e doppio di questo; nel secondo caso, il segmento *PP’’* risulta perpendicolare agli assi delle due riflessioni, orientato nel verso dal primo al secondo asse, e di lunghezza doppia della distanza tra gli assi delle due riflessioni.

2. Tassellazioni e tappezzerie.

La risposta alla domanda 3 è sì, anche quando il quadrilatero non è convesso. Le trasformazioni da usare sono le simmetrie centrali con centro nei punti medi dei lati.

La risposta a 4, relativamente al mosaico di destra, è: traslazioni e glissoriflessioni..

3. Isometrie di una figura.

Il problema 7c è un caso particolare del problema di determinare **le isometrie di un poligono regolare** (Villani, pag. 251, **Teorema 2**): se P è un poligono regolare di n lati, il gruppo delle sue isometrie consta di $2n$ elementi; n di queste isometrie sono pari, e n sono dispari. Le prime sono le rotazioni, intorno al centro del poligono, di $2k\pi/n$, $k = 0, ..., n-1$; le seconde sono riflessioni, che se n è dispari hanno come assi le rette per ogni vertice e il punto medio del lato opposto, se n è pari sono le congiungenti i vertici opposti e le congiungenti i punti medi di lati opposti.

I problemi finali preparano allo studio dei sottogruppi *discreti del gruppo delle isometrie piane*. Si dimostra (M. Dedò, *Forme,* n. 7) che esistono solo 7 gruppi (a meno di equivalenze) di isometrie di fregi e 17 gruppi di mosaici; i primi contengono un sottogruppo di traslazioni che sono multiple di una traslazione fissata (generatore), i secondi un sottogruppo di traslazioni con due generatori aventi direzioni distinte.