3 giugno 2008

Il problema del volume dei solidi: Euclide, Dehn, Cavalieri, Archimede.
(Schema della lezione)

Riferimento principale: V. Villani, Cominciamo dal punto, n. 11, *Come si definisce il volume di un solido dello spazio? E perché le dimostrazioni della formula del volume della piramide sono tanto complicate?*

1. Volume come classe di equivalenza tra solidi: quali solidi?
Come è consuetudine nell'insegnamento secondario, ci asteniamo dal definire i solidi, e ci limitiamo a prendere in considerazione alcuni casi particolari (che richiedono definizioni ad hoc):

1. *prisma* indefinito: prendi un poligono piano convesso, una retta non parallela al piano del poligono, fai tutte le parallele a quella retta per i punti del poligono
2. *prisma* definito: taglia un prisma indefinito con due piani paralleli
3. *parallelepipedi*: prismi definiti con facce che sono parallelogrammi
4. piramidi
5. poliedri.

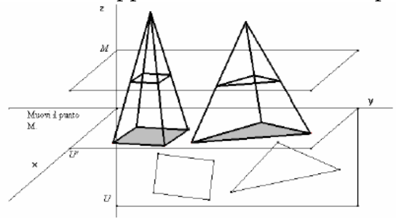
Domanda cruciale: c'è una famiglia, abbastanza grande, di solidi per i quali "essere equiscomponibili" o "equicompletabili" sia una relazione di equivalenza? Se trovassimo la risposta a questa domanda, sarebbe facile procedere, sulla falsariga del lavoro già fatto per l'area; i passi da compiere sono:

1. il volume è definito come la classe di equivalenza cui appartiene il solido
2. si dimostra che ad ogni classe appartiene un parallelepipedo (cioè, il solido considerato è equivalente a un parallelepipedo) con una faccia quadrata, di lato fissato
3. si sceglie come unità di misura il volume del cubo che ha come lato l'unità di misura delle lunghezze
4. la misura del volume del solido si riduce alla misura dell'altezza del parallelepipedo equivalente, con base di area unitaria
5. se un solido non appartiene alla famiglia per la quale la relazione di equivalenza è valida, lo si approssima per difetto e per eccesso con solidi della famiglia.....

La famiglia di solidi per cui può essere applicato questo metodo, analogo a quello seguito per le aree, è costituita soltanto da prismi.
Infatti già per le piramidi occorrono metodi infinitesimali ("esaustione" per i Greci).
Il terzo problema di Hilbert (congresso di Parigi, 1900): *trovare due tetraedri di basi eguali e uguali altezze che non possono essere scomposti in (un numero finito di) tetraedri congruenti né possano essere combinati con un numero finito di tetraedri congruenti a formare due poliedri che possano essere a loro volta scomposti in (un numero finito di) tetraedri congruenti.*
Il problema fu risolto poco dopo da **Max Dehn** (Amburgo 1878 - Black Mountain 1952); egli mostrò che devono sussistere certe relazioni tra le ampiezze angolari dei diedri di due poliedri perché questi siano equiscomponibili o equicompletabili, e produsse un esempio di tetraedri con ugual base e ugual altezza che non soddisfano quelle condizioni.

2. Il principio di Cavalieri ([1]).
Due solidi sono equivalenti se si possono disporre in modo che ogni piano parallelo a un piano dato li tagli in sezioni equivalenti.
Ne segue che:

(a) prismi aventi basi equivalenti e uguale altezza sono equivalenti
(b) piramidi aventi basi equivalenti e ugual altezza sono equivalenti (occorre osservare che le sezioni di uno stesso solido con piani paralleli sono simili, ed i rapporto di similitudine dipende dalla coppia di piani)

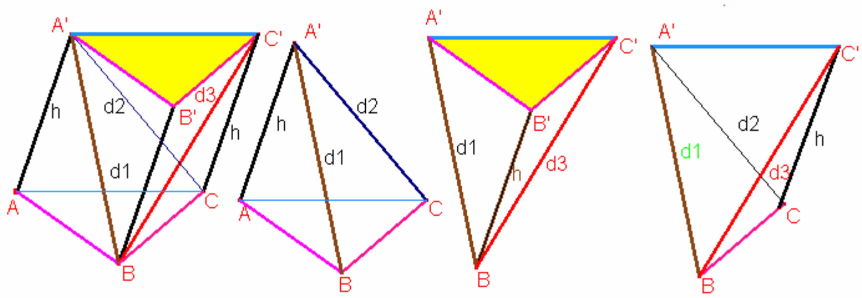


(figura da "Matematica 2003, http://umi.dm.unibo.it/italiano/Matematica2003/matematica2003.html, da"Spazio e figure", "Equivalenza nello spazio")
Usando (b) si dimostra facilmente il teorema 7 del libro XII di Euclide: *il volume di una piramide è un terzo di quello del prisma con ugual base e uguale altezza*.
La dimostrazione si fa per il prisma a base triangolare; negli altri casi, si decompone la base in triangoli e, quindi, il prisma in prisma triangolari.

[1] Bonaventura Cavalieri, 1598-1647, gesuita, pubblica, nel 1635, *Geometria indivisibilibus continuorum nova quidam ratione promota.*

3 giugno 2008

Villani (pag. 125-6) osserva che la visualizzazione della decomposizione del prisma triangolare in tetraedri equivalenti non è agevole; si deve applicare (b) confrontando una stessa piramide con ciascuna delle altre due, prendendo come basi facce diverse nei due casi. Nel disegno qui sotto, la prima piramide, con base ABC, ha base congruente alla base A'B'C' della seconda; le due piramidi hanno la stessa altezza perché le loro basi giacciono su piani paralleli. Per confrontare la seconda piramide con la terza conviene considerare come base la faccia BC'B', che è congruente alla BCC' ; i due triangoli, appartenendo allo stesso piano, hanno ugual distanza da A'.



Nota (Villani, pag. 132) : il metodo di Cavalieri è di applicabilità limitata. Cavalieri ha un posto nella storia del calcolo infinitesimale, sebbene il concetto di integrale definito si sviluppi secondo altre linee di pensiero (area sotto una curva ottenuta da approssimazioni con aree di rettangoli inscritti e circoscritti).

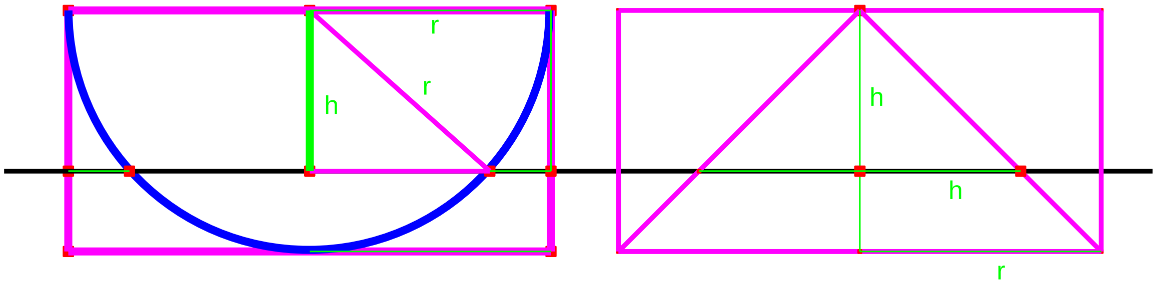
3. Il volume della sfera.

Teorema di Archimede (che volle fosse raffigurato sulla sua tomba): *il volume della sfera è* 2/3 *del volume del cilindro ad essa circoscritto.*

O anche: *il volume del cilindro con raggio di base* r *e altezza* 2r *è la somma di quello della sfera di raggio* r *e del cono di raggio di base* r , *altezza* 2r.

Per dimostrarlo, **Archimede** pensa la sfera come formata da piramidi, che hanno il vertice nel centro della sfera e hanno come base un piccolo pezzo di superficie sferica; tutte queste piramidi hanno come altezza il raggio della sfera, e l'area complessiva delle basi è l'area della sfera. Egli approssima queste piramidi con coni, e mostra che il volume complessivo di questi coni è lo stesso del cono che ha come altezza il raggio della sfera e come base un cerchio di area uguale a quella della sfera, dunque $\frac{1}{3}r \cdot 4\pi r^2$.

Il ragionamento di Galileo: dal cilindro, di raggio e altezza uguali a *r*, togliamo la semisfera di raggio *r:* otteniamo la "scodella di Galileo". Calcoliamo il volume della scodella utilizzando il metodo di Cavalieri: La sezione della scodella con un piano che dista *h* dalla faccia superiore del cilindro è una corona circolare, che ha raggio esterno uguale a *r* e raggio interno uguale a $\sqrt{r^2 - h^2}$, quindi ha area di misura $\pi\,(r^2 - r^2 + h^2)$. Questa area è uguale all'area della sezione, alla stessa altezza *h*, del cono con raggio di base *r* e altezza *r*: infatti la sezione del cono è una circonferenza di raggio *h.*



Allora il volume della scodella di Galileo è uguale al volume del cono, e quindi il volume del cilindro, di altezza *r* uguale al raggio, è la somma del volume del cono, della stessa altezza e stesso raggio di base, e del volume della semisfera di raggio *r*.

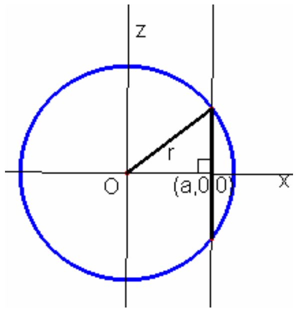
3 giugno 2008

Un esercizio interessante di calcolo integrale consiste nel calcolare il volume della sfera, di raggio *r* con centro l'origine delle coordinate, integrando tra $-r$ ed r l'area del cerchio che si ottiene tagliando la sfera con il piano perpendicolare all'asse delle *x* nel punto (a,0,0).

La figura mostra le sezioni della sfera e del piano secante con $y = 0$.
Per il teorema di Pitagora, il quadrato del raggio del cerchio, tagliato dal piano perpendicolare all'asse delle *x* in (a,0,0), è uguale a $r^2 - a^2$, quindi l'area del cerchio è $\pi(r^2 - a^2)$. Il volume della sfera è dunque:

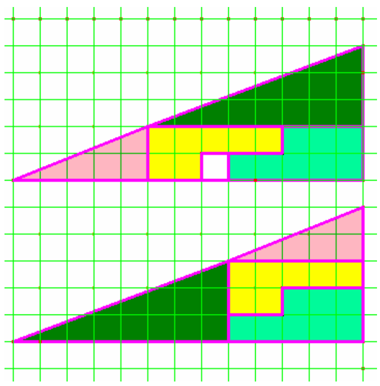
$$Vol(sfera) = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - a^2)da = \left[a\pi r^2\right]_{-r}^{r} - \left[\pi \frac{a^3}{3}\right]_{-r}^{r} = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$$

cioè
Vol(sfera) = *Vol*(cilindro circoscritto) – *Vol*(cono circoscritto).



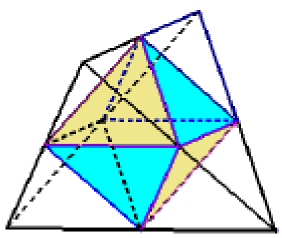
Per riflettere su aree e volumi
(lavori di gruppo)

A. Un rompicapo: dove è finito il quadratino bianco?



B. Da "Matematica 2003, http://umi.dm.unibo.it/italiano/Matematica2003/matematica2003.html, "Spazio e figure", "Equivalenza nello spazio", **Prove di verifica**

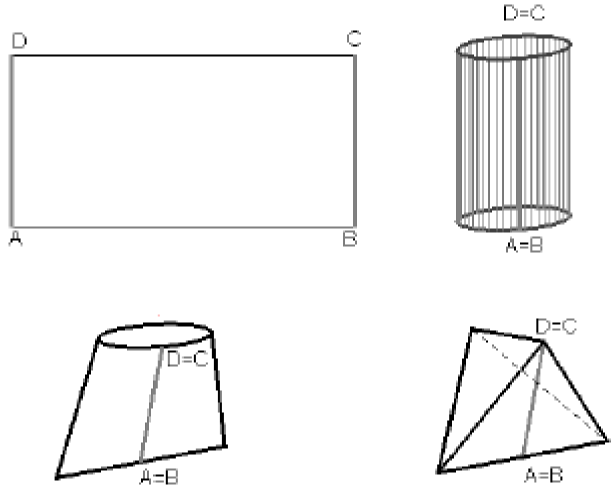
1. Disegna due poliedri equiscomponibili, ma che non siano nella relazione di Cavalieri.
2. Dato un cubo di spigolo *l*, determina lo spigolo del cubo di volume doppio.
3. Dimostra che in un tetraedro le aree delle sue facce sono inversamente proporzionali alle relative altezze.
4. Trovare il volume di un ottaedro regolare di spigolo *l*.
5. Osservando la figura, verifica che il volume di un tetraedro regolare è ¼ del volume di un ottaedro che ha lo stesso lato



6. Un rettangolo di dimensioni *a* e *b* viene fatto ruotare di un giro completo attorno a uno dei suoi lati e genera così due cilindri. Hanno lo stesso volume?

(Questo problema è riportato da Galileo nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze.* I contadini del tempo di Galileo avevano capito che se con un pezzo di tela "più lungo per un verso che per l'altro" si costruisce la superficie laterale di un sacco, allora il sacco più basso e largo contiene una maggior quantità di grano.)

7. I "tetrapack", contenitori a forma di tetraedro regolare, sono costruiti a partire da un cilindro. Se il diametro del cilindro è 10 cm., trovare il volume del "tetrapack"



Note ai lavori di gruppo.

A. La figura è ingannevole, perché sembra mostri due triangoli rettangoli, con cateti uguali, decomposti in parti. Se così fosse, applicando il teorema di Talete si dovrebbe trovare che le parti triangolari (verde e rosa) hanno i cateti in proporzione. Ma basta contare i quadretti che bordano le parti triangolari per scoprire che non è così.

B.5. Indichiamo con *l* il lato dell'ottaedro regolare. La figura mostra che è possibile inscrivere l'ottaedro in un tetraedro regolare di lato 2*l.* Il tetraedro di lato 2*l* risulta decomposto nell'ottaedro e in quattro tetraedri di lato *l* (trasparenti, uno per ogni vertice del tetreaedro di lato 2*l).*
Ne segue che il volume del tetraedro di lato 2*l* è la somma del volume dell'ottaedro e dei volumi di quattro tetraedri di lato *l.* Ma il volume del tetraedro di lato 2*l* è 8 volte quello del tetraedro di lato *l*…..