30 maggio ’08

Lunghezze, aree
(schema della lezione)

Riferimenti:
V. Villani, Cominciamo dal punto, 9: *Come si definisce la lunghezza di un segmento? E la lunghezza di una curva del piano e dello spazio?* 10. *Come di definisce l’area di una superficie piana? E l’area di una superficie curva nello spazio?*
Matematica 2003, http://umi.dm.unibo.it/italiano/Matematica2003/matematica2003.html
Una unità didattica su π si trova in http://www.cartesionline.it/argomenti/algebra_ud_pigreco_1.cfm (preparata da una insegnante, Anna Cristina Mocchetti, del Liceo Scientifico Majorana di Rho).

A. Lunghezze.

A.1. Cominciamo dai segmenti. Che cosa si intende per ***lunghezza di un segmento***?
Occorre *postulare* la possibilità di trasportare segmenti e confrontarli, in modo da stabilire se sono uguali (o congruenti). La relazione di uguaglianza o congruenza è una relazione di equivalenza (Villani fa osservare che il confronto di stringhe elastiche non gode neppure della proprietà riflessiva!).
La lunghezza del segmento AB è la classe di equivalenza (rispetto alla relazione “essere congruenti”) *a cui appartiene* il segmento *AB.*

Come si passa dalle lunghezze alle loro misure? Il percorso tradizionale, che si ispira ad Euclide, consiste di varie tappe:

- definizioni di somma di segmenti, multiplo di un segmento, sottomultiplo;
- se $m\,AB = n\,CD$ diciamo che il *rapporto* tra *AB* e *CD* è il numero *n/m* (scriviamo $\frac{AB}{CD}=\frac{n}{m}$)
- se i segmenti *AB*, *CD* non hanno sottomultipli comuni (cioè, se non esiste nessuna coppia di interi *n*, *m*, per cui si abbia $(1/n)\,AB = (1/m)\,CD$) i segmenti sono *incommensurabili.*[1] In questo caso,
    - l’insieme di tutti i numeri razionali *p/q* , per i quali è $\frac{p}{q}CD < AB$, è un insieme superiormente limitato. L’estremo superiore di questo insieme di numeri razionali è un numero reale, α, che chiamiamo *rapporto* tra i due segmenti.
    - Alternativamente, si costruiscono le due classi, quella di tutti i segmenti commensurabili con *CD* e minori di *AB* e quella dei segmenti commensurabili con *CD* e maggiori di *AB*, il cui elemento separatore è *AB.* Le due classi di segmenti determinano una coppia di classi di numeri razionali ([2]), che definisce il numero reale α.
- L**a** ***misura*** di un segmento *AB* rispetto a un segmento fissato **u** (unità di misura) è il rapporto $\frac{AB}{\mathbf{u}}$, dunque è un numero reale, che è razionale se i due *AB* è commensurabile con **u**, irrazionale nell’altro caso.

Teorema 1 (additività delle misure) *Se vale la relazione tra segmenti* AB = AC + CB, *allora, fissata a piacere l’unità di misura e indicata con mis*(AB) *la misura del segmento* AB, *vale la relazione tra misure*

$$mis(AB)= mis(AC)+ mis(CB)$$

(spesso si usa la notazione $\overline{AB}$ invece che *mis*(AB)).
Teorema 2 (invarianza del rapporto tra le misure) *Il rapporto tra due segmenti (il secondo non degenere) è un numero puro, dato dal quoziente delle loro misure rispetto ad una qualsiasi unità di misura* (cioè, *non dipende dall’unità di misura usata per misurare i due segmenti*).

A2. Curve.
Pensiamo a una traiettoria di un punto mobile, che non ripassi per una posizione già assunta, fuorché eventualmente al termine del percorso (e in quel caso, per tornare al punto di partenza): in linguaggio più tecnico, supponiamo che per ogni numero reale *t* dell’intervallo chiuso [a,b], siano note le coordinate di *P*(*t*), espresse come funzioni “lisce” del parametro *t*, e che inoltre

$$P(t_1) = P(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2 \text{ oppure } t_1 = a, t_2 = b.$$

[1] Non è difficile mostrare che diagonale e lato di un quadrato sono incommensurabili; la dimostrazione è alla portata di ragazzi che conoscano le proprietà delle decomposizioni in fattori primi dei numeri interi, ed è reperibile sui testi per la scuola superiore.
[2] le cui caratteristiche vengono sintetizzate nel termine “contigue”.

30 maggio ’08

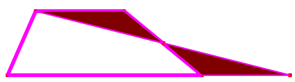
Come si misura una strada? Si mettono paletti in vari punti e si calcolano le distanze tra i paletti; la somma delle distanze approssima per difetto la lunghezza della strada. Si definisce ***lunghezza di una curva l’estremo superiore delle lunghezze di tutte le poligonali inscritte.***
Per le curve differenziabili, si dimostra che la lunghezza è ottenibile dal calcolo di un integrale.

La ***lunghezza della circonferenza*** però fu stabilita da Archimede (287-212) considerando non tutte le possibili poligonali inscritte ma poligoni regolari inscritti e circoscritti, raddoppiando ad ogni passo il numero dei lati.
La doppia successione serve a Archimede per maggiorare l’errore, che si commette arrestandosi al passo k-esimo, con la differenza tra la lunghezza del k-esimo poligono circoscritto e del k-esimo inscritto (con lo stesso numero di lati). Partendo dall’esagono regolare e arrivando a 96 lati, riuscì a dimostrare che π è compreso tra $3 + 10/71$ e $3 + 1/7$.

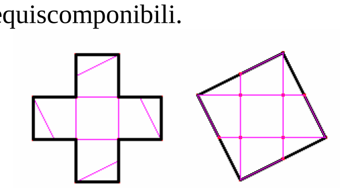
B. Aree.

B.1. Cominciamo dai poligoni. Come la lunghezza di un segmento è una classe di equivalenza di segmenti congruenti, così l’area di una superficie è una classe di equivalenza di superficie “equiestese”.
Cominciamo dai poligoni. Seguendo Euclide, si definisce una relazione di equivalenza tra poligoni ricorrendo alla possibilità di scomporre i poligoni in parti congruenti.

Definizione 1. Un poligono P è *scomposto* in un numero finito di parti poligonali P_1, P_2, …P_n se P è l’unione di queste parti, che hanno in comune, al più, punti dei loro bordi.
Definizione 2. Due poligoni P, Q sono *equiscomponibili* se è possibile scomporre entrambi nello stesso numero finito di parti poligonali a due a due uguali.
Esempio noto dalle scuole elementari: un trapezio è equiscomponibile con un triangolo che ha come base la somma delle basi del trapezio.



La figura che segue mostra due poligoni equiscomponibili.

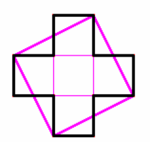


Teorema 1. *L’equiscomponibilità è una relazione di equivalenza tra poligoni.*
Idea della dimostrazione della proprietà transitiva: se P può essere decomposto in due modi diversi, così che la prima decomposizione sia ricomponibile per ottenere P', la seconda per ottenere P'', basta “sovrapporre” le due decomposizioni, ricavandone una che contiene un numero maggiore di parti poligonali, che si utilizzano per decomporre P' e P'' in parti congruenti (Villani, pag. 106).
Teorema 2. *Ogni poligono è equiscomponibile con un rettangolo; uno dei lati di questo rettangolo può essere scelto di lunghezza arbitraria.*

Il primo teorema permette di definire come *area* di un poligono *la classe di equivalenza a cui appartiene il poligono* (e tutti quelli equiscomponibili con esso); il secondo teorema consente, fissata come unità di misura delle aree il quadrato unitario, di associare ad ogni area un numero: precisamente, trasformato il poligono P qualsiasi nel rettangolo, ad esso equivalente, con un lato di lunghezza unitaria, la ***misura dell’area di P coincide con il numero reale*** **che misura la lunghezza dell’altro lato del rettangolo.**
Anche per le misure delle aree valgono i **Teoremi (3) di additività delle misure; (4) di invarianza del rapporto tra le misure.**

Obiezione: nei libri si parla di equicompletabilità; è necessaria? Due poligoni P, Q sono *equicompletabili* se aggiungendo ad essi parti a due a due uguali (congruenti) si ottengono poligoni equiscomponibili.

La croce greca e il quadrato mostrati sopra sono equicompletabili.
Non per caso: vale il teorema (Bolyai-Gerwien): *due poligoni sono equicompletabili se e solo se sono equiscomponibili.* La relazione di equicompletabilità non è quindi necessaria per la teoria dell’area, però è comodo usarla, perché alcune dimostrazioni riescono più facili.



Conviene usare l'equicompletabilità per ottenere il teorema sulla equivalenza tra parallelogrammi con la stessa base e la stessa altezza (vedi le attività didattiche che seguono); la dimostrazione per equiscomponibilità richiede l'uso dell'assioma di Archimede[3]. D'altra parte, l'assioma di Archimede è necessario per dimostrare il teorema di Bolyai-Gerwien.

Nota: Villani (pag. 112) sconsiglia, per l'insegnamento nelle scuole secondarie, approfondimenti troppo tecnici.

B.2. L'area di figure piane qualsiasi, del cerchio.
Data una figura piana non poligonale, la si approssima con poligoni inscritti e circoscritti: se l'estremo superiore delle misure delle aree dei primi coincide con l'estremo inferiore delle misure delle aree dei secondi, il valore comune è la misura dell'area della figura.
In "Matematica 2003", Misurare, http://umi.dm.unibo.it/italiano/Matematica2003/matematica2003.html, è presentata un'attività didattica per il secondo biennio, dal titolo "Superficie scomode", che propone di valutare approssimazioni dell'area di una figura non regolare.

Teorema di Archimede per il cerchio.
Primo passo: l'area di un poligono regolare è uguale a quella di un triangolo rettangolo avente per cateti rispettivamente l'apotema del poligono e il suo perimetro.
Per il poligoni inscritti nel cerchio, al crescere del numero dei lati gli apotemi crescono, tendendo verso il raggio, e il perimetro cresce, tendendo alla lunghezza della circonferenza; per i poligoni circoscritti, gli apotemi sono tutti uguali al raggio, mentre i perimetri decrescono al crescere del numero dei lati, tendendo alla lunghezza della circonferenza. Quindi l'area del cerchio è maggiorata e minorata dall'area del triangolo che ha come cateti il raggio e la circonferenza.

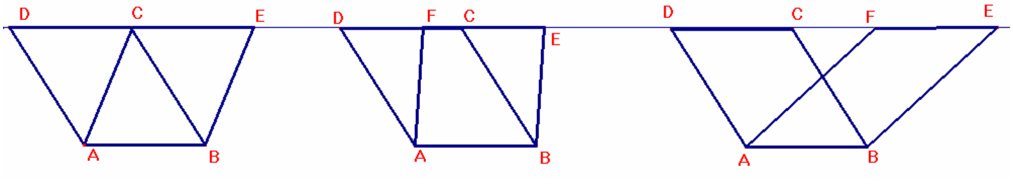
B.3 Aree di superfici non piane.
Problema: che cosa è una superficie? Nella tradizione della scuola secondaria si mostrano esempi di superfici ma *saggiamente* non si tenta una definizione.
Per cono e cilindro (superfici sviluppabili) non è difficile trovare che sono rispettivamente equivalenti a un settore circolare e a un rettangolo.
La sfera non è sviluppabile, cioè non è possibile stabilire una "buona" bigezione tra un pezzo di sfera ed un pezzo di piano conservando le distanze di punti corrispondenti. **Archimede** (287-22 a.C.) calcola l'area della sfera considerando le aree delle superfici ottenute facendo ruotare poligonali regolari inscritte e circoscritte ad una semicirconferenza; dimostra che al crescere del numero dei lati queste aree tendono ad uno stesso valore, pari a 4 volte l'area del cerchio che ha lo stesso raggio della sfera.

B.4. Ostacoli alla comprensione del concetto di area.
C. Marchini, *Il problema dell'area*, L'Educazione Matematica, XX, n. 1, 1999, nota la "cattiva qualità" dell'analogia con le lunghezze: mentre è facile costruire un multiplo di un segmento e, grazie al teorema di Talete, costruire un sottomultiplo, non è affatto scontato costruire un multiplo o un sottomultiplo di un quadrato.
Villani (pag. 118) mostra come **non** sia possibile estendere direttamente alle superfici il procedimento usato per determinare la lunghezza delle curve (come estremo superiore delle lunghezze delle poligonali inscritte): le aree di superfici poliedriche approssimanti una superficie possono non avere limite!

Esempi di attività didattiche su equiscomponibilità, equicompletabilità, teorema di Pitagora.

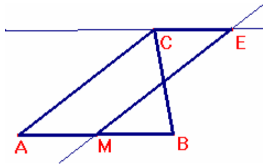
(laboratorio e discussione)

1. Dimostrare il teorema (Euclide, I.35): *parallelogrammi con la stessa base, e con i lati opposti a questa giacenti su una stessa retta, sono equivalenti*, esaminando i tre casi possibili, presentati nella figura.



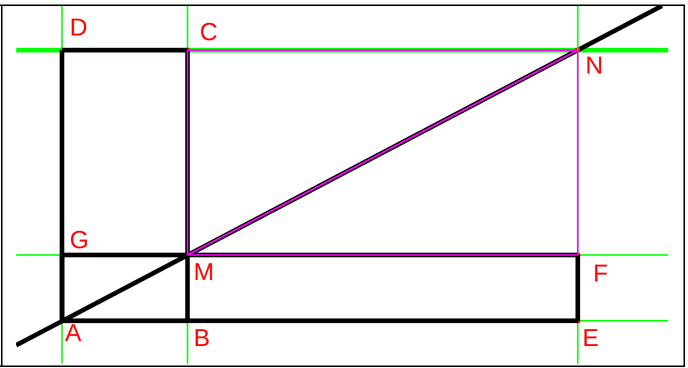
[3] Dati due segmenti a, b, supposto che sia $a < b$, esiste un intero n tale che $n\,a > b$.

2. Dimostrare, usando il teorema precedente, che (Euclide, I.37): *triangoli con la stessa base e con il vertice opposto su una parallela alla base sono equivalenti.*
Suggerimento: cominciare col mostrare, utilizzando la figura, che il triangolo dato *ABC* è equivalente a un parallelogrammo.



3. Utilizzando i suggerimenti che seguono, dimostrare che, *dato un rettangolo ABCD, esiste un rettangolo AEFG ad esso equivalente, con un lato prefissato AG* (Euclide, I. 43).

- Da *G* mando la parallela ad *AB*, determino *M* come intersezione con *BC*
- la retta *AM* incontra *CD* in *N*
- mando per *N* la parallela a *BC* per costruire *EF*
- per concludere, basta far vedere che i rettangoli *GMCD, BEFM* sono equivalenti
- il primo, aggiungendo due triangoli, si completa nel triangolo *AND*
- il secondo si completa, con triangoli, nel triangolo *ANE;*
- i triangoli ……………………………………

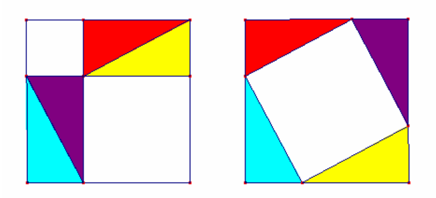


4. Dimostrare il **Teorema 2:** *ogni poligono è equiscomponibile con un rettangolo, avente un lato di lunghezza fissata*, utilizzando i seguenti fatti:

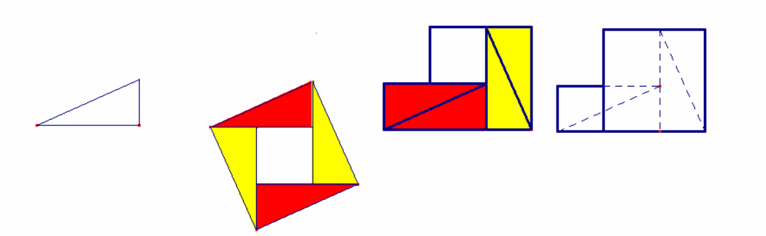
a) ogni poligono è scomponibile in un numero finito di triangoli
b) un triangolo è equivalente a un parallelogrammo (sopra, n. 2)
c) ogni parallelogramma è equivalente ad un rettangolo (n. 1)
d) ogni rettangolo è equivalente a un rettangolo con un lato assegnato (n. 3).

5. Aggiungere le parole a queste “**dimostrazioni senza parole” del teorema di Pitagora** ([4]), basate sulla equiscomponibilità

(a) autore cinese, circa 200 a.C.

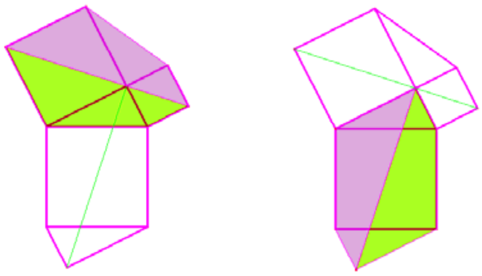


(b) Bhaskara, XII secolo ([5])

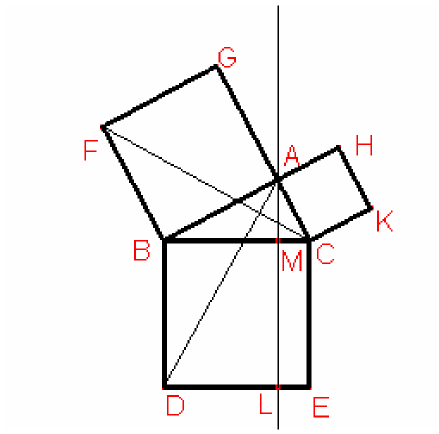


[4] Matematica 2003, Spazio e figure, Il teorema di Pitagora tra leggenda e storia; R. B. Nelsen, *Proofs without words, Exercises in visual thinking*, The Mathematical Association of America, 1993, e *Proofs without Words II,* MAA, 2000.
[5] per facilitare la comprensione, sono state fatte delle aggiunte alla figura del testo di Nelsen

(c) Leonardo da Vinci (1452-1519)



6. Completare le parti mancanti nella **dimostrazione** del teorema di Pitagora secondo Euclide (I.47)

(La retta AM è perpendicolare all’ipotenusa BC) Gli angoli DBA, FBC sono uguali perché .... i triangoli DBA, FBC sono uguali per .... il parallelogramma BDLM è doppio del triangolo BDA perché .... il quadrato GFBA è doppio del .... quindi il rettangolo BDLM è equivalente a .... Analogamente, se congiungessimo A con E, B con K troveremmo che .... quindi l’intero quadrato BDEC è equivalente alla somma dei due quadrati sui lati AB, AC.	

7. Dato un triangolo rettangolo, se invece che costruire sui suoi lati dei quadrati, costruissimo delle altre figure, tra loro correlate secondo qualche regola, varrebbe ancora una proprietà del tipo di quella affermata dal teorema di Pitagora?

8. Come si può costruire, con riga e compasso, un quadrato equivalente ad un rettangolo dato?

9. Enunciare e dimostrare l’inverso del teorema di Pitagora (*suggerimento:* se la tesi non fosse vera, si potrebbe costruire....)

Note al Laboratorio.

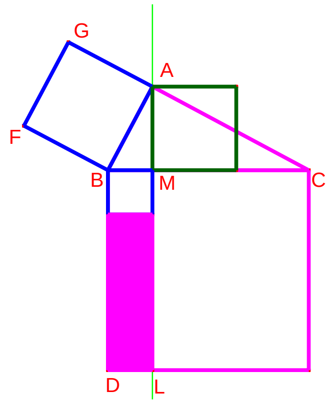
1. Nei primi due casi, si osserva che i parallelogrammi sono equiscomponibili, nel terzo che sono equicompletabili (per formare il trapezio *ABED).*

4. Il poligono è equivalente ad una somma di triangoli, che a sua volta è equivalente ad una somma di rettangoli aventi tutti un lato di lunghezza fissa, e quindi ad un unico rettangolo con un lato di quella lunghezza fissa.

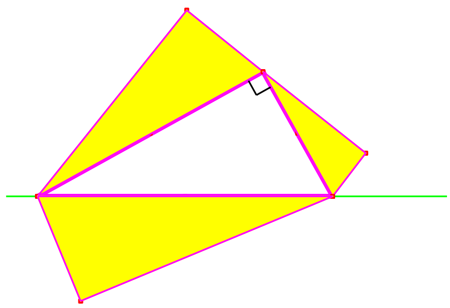
5. La prima dimostrazione consiste nel confrontare due diverse scomposizioni del quadrato che ha come lato la somma dei cateti del triangolo rettangolo.
La seconda dimostrazione si basa sull’osservazione che il primo quadrato, di lato uguale all’ipotenusa del triangolo rettangolo dato, contiene un quadrato bianco che ha come lato la differenza dei cateti del triangolo rettangolo. Il quadrato bianco può quindi essere posto nella figura successiva in modo che il suo lato superiore si allinei con il lato superiore del rettangolo di destra. La seconda figura è equivalente alla terza, costituita dai quadrati che hanno come lati i due cateti.

Nella terza dimostrazione, è facile vedere che i due quadrilateri colorati della figura a sinistra sono congruenti, perché ciascuno è decomposto in mezzo quadrato su un cateto, il triangolo dato o uno congruente, mezzo quadrato sull’altro cateto. Ciascuno di questi quadrilateri ha tre lati consecutivi e due angoli consecutivi ordinatamente congruenti a lati ed angoli consecutivi dei quadrilateri della figura a destra, quindi si conclude (se si vuole, decomponendo i quadrilateri in due triangoli) che tutti i quadrilateri sono congruenti tra loro. Sottraendo i quadrilateri ed un triangolo da ciascuna delle due figure si ottiene il risultato.

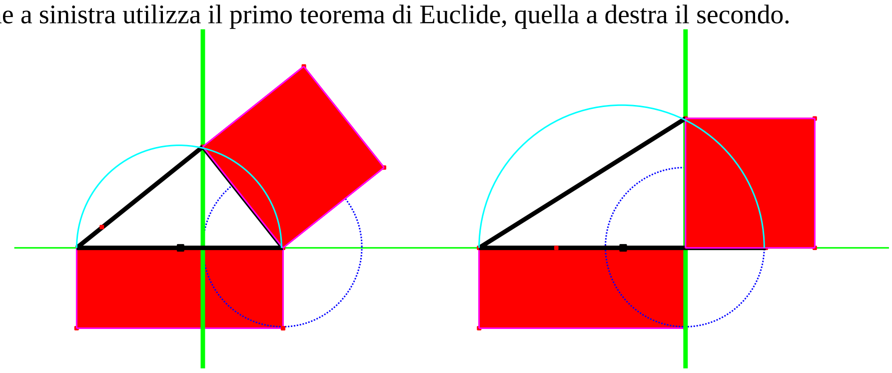
6. La prima parte della dimostrazione costituisce il cosiddetto **Primo teorema di Euclide:** *in ogni triangolo rettangolo, il quadrato su un cateto è equivalente al rettangolo che ha per lati l’ipotenusa e la proiezione del cateto sull’ipotenusa.*
Dal teorema di Pitagora e dal primo teorema di Euclide si deduce (provare!) il **secondo teorema di Euclide:** *in ogni triangolo rettangolo, il quadrato sull’altezza relativa all’ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per lati le proiezioni dei cateti sull’ipotenusa.*



7. Un esempio (i triangoli su cateti e ipotenusa sono tra loro simili)**:**



8. La costruzione a sinistra utilizza il primo teorema di Euclide, quella a destra il secondo.



9. Per ipotesi, il quadrato costruito sul lato maggiore, *BC*, è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sugli altri lati del triangolo. Supponiamo che l’angolo di vertice *A* non sia un angolo retto. Costruiamo un triangolo rettangolo *A’B’C’* con cateti *A’B’* = *AB*, *A’C’* = *AC*. Per il teorema di Pitagora, il quadrato costruito sull’ipotenusa *B’C’* è equivalente alla somma dei due quadrati di lati *A’B’*, *A’C’*, e quindi alla somma dei due quadrati di lati *AB*, *AC*; dall’ipotesi segue che esso è equivalente al quadrato di lato *BC*. *Si può dimostrare, in base ai teoremi* 1,2, che se due quadrati sono equivalenti, i loro lati sono congruenti. Per il terzo criterio di congruenza, i triangoli *ABC*, *A’B’C’* sono congruenti e quindi anche il triangolo *ABC* è rettangolo.