

Enrico Pontorno

enrico.pontorno@fastwebnet.it

“Sono un professore di «metodo scientifico» ma ho un problema: il metodo scientifico non esiste”

(K. Popper, London School of Economics)

“Il potere dell'insegnamento è raramente di molta efficacia tranne che in quelle felici situazioni dove è quasi superfluo”
(Gibbons, riportato in *La Fisica di Feynman*, vol. 1 parte 1)

Assioma Zero della Didattica:

Sono i buoni studenti che fanno i buoni insegnanti.

Sul “metodo d'insegnamento”. L'opinione di R. Feynman

.... Credo anzi che il miglior modo d'insegnare sia quello di non avere alcuna filosofia e di fare un corso caotico e confuso più che sia possibile, utilizzando tutti i punti di vista possibili. Avere differenti esche su più ami è il solo modo per agganciare ora questo ora quello studente: se uno s'appassiona quando parlate degli aspetti storici del vostro argomento e ha paura del formalismo matematico, un altro si riposerà in quel frangente ma si ecciterà quando passerete alle equazioni. Per fortuna non tutti abbiamo gli stessi interessi - di più, bisogna rispondere alle attese di ciascuno e non uniformare lo stile d'insegnamento soggiacendo a pseudo-teorie pedagogiche.

Bibliografia essenziale commentata

- Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica*, Bollati
Il più bel libro di divulgazione matematica mai scritto!
- V. Villani, *Cominciamo dal punto*, Pitagora Editrice
- V. Villani, *Cominciamo da zero*, Pitagora Editrice
Due testi fondamentali, che tentano di rispondere ai perché dell'algebra, dell'aritmetica e della geometria elementari. Per docenti di tutti gli ordini scolastici.
- H.S.M. Coxeter, *Introduction to geometry*, J. Wiley & Sons Inc.
Un classico di un Autore, insigne geometra, che ha percorso tutto il secolo appena trascorso. Ricco di spunti didattici.
- H. S. M. Coxeter-S. L. Greitzer *Geometry Revisited* MAA
Eccellente opera, ricchissima di spunti: indispensabile per un insegnante.
- M. Kline *Storia del pensiero matematico*, 2 voll. Einaudi
Un classico della storia della matematica. Fondamentale per la consultazione.

Manuali scolastici

- P. Boieri, C. Dané *Geometria con CABRI* Loescher
Il curriculum di geometria del biennio delle superiori affrontato con l'ausilio di CABRI.
- CABRI World 2004 *Percorsi di geometria dinamica* Media Direct
Gli Atti del convegno mondiale di CABRI, svoltosi a Roma nel 2004. Ricchissimo di esempi ed attività da svolgere in classe.
ESAURITO
- Anzalone, Margarone, Micale *Euclide al computer* La
Tecnica della Scuola
Una lettura dei primi libri degli *Elementi* di Euclide fatta con l'ausilio di CABRI.
- A. Brigaglia, G. Indovina *Stelle, girandole e altri oggetti matematici* Zanichelli Decibel
Volume ricco di esempi ed attività da svolgere in laboratorio,

molto adatto a studenti di scuola media inferiore ma utilizzabile anche a livello di scuola elementare.

- F. Enriques – U. Amaldi Elementi di Geometria Zanichelli
Il padre di tutti i manuali di geometria.

Riviste di didattica

- *L'insegnamento della Matematica*
Centro MORIN Paderno del Grappa (TV)
- *Archimede* Le Monnier
- Progetto Alice Libri

Le costruzioni geometriche elementari (con riga e compasso)

Per la geometria del piano le costruzioni elementari sono:

1. Dati due punti, tracciare la retta che li unisce;
2. Date due rette, determinare la loro intersezione;
3. Descrivere un cerchio avente per centro un punto dato e passante per un altro punto dato;
4. Data una retta e un cerchio determinare le loro intersezioni;
5. Determinare i punti di incontro di due cerchi.

Esercizi preparatori ... per distruggere

1. Disegnare un quadrilatero che abbia:
 - 1.1. Le diagonali uguali;
 - 1.2. Le diagonali perpendicolari;
 - 1.3. Le diagonali tali che una sia asse dell'altra;
 - 1.4. Le diagonali uguali e perpendicolari;
 - 1.5. Le diagonali che si bisecano;
 - 1.6. Le diagonali uguali che si bisecano;
 - 1.7. Le diagonali uguali e perpendicolari che si bisecano;
 - 1.8. Due lati consecutivi uguali;
 - 1.9. Tre lati uguali;
 - 1.10. Due lati opposti uguali;
 - 1.11. Due lati perpendicolari;
 - 1.12. Tre lati perpendicolari (?!?)
 - 1.13. ... e chi più ne ha...;

Esercizi preparatori ... per costruire

<http://www.z-u-l.de>

1. Dati tre segmenti, costruire il triangolo avente i tre segmenti come lati.
2. Dato un segmento, costruire un quadrilatero avente i lati eguali a quel segmento.
3. Dati due segmenti, costruire un quadrilatero avente i due segmenti come diagonali perpendicolari.
4. Dato un qualsiasi quadrilatero, i punti medi dei lati sono sempre vertici di un parallelogramma.
 - a) Quando il parallelogramma è un rettangolo?
 - b) Quando un rombo?
 - c) Quando un quadrato?
5. Dati due segmenti, costruire il parallelogramma avente i due segmenti come lati.
6. Dati due segmenti, costruire il parallelogramma avente i due segmenti come diagonali ?!?. **INDETERMINATO!**
Allora fissiamo anche l'angolo delle diagonali.

Altri problemi di costruzione

7. Costruire un triangolo conoscendo le posizioni dei punti medi dei suoi lati.
8. Dato un parallelogramma ABCD, si scelga sul prolungamento di AB un punto E tale che $BE=BC$ e sul prolungamento di AD un punto F tale che $DC=DF$. Si dimostri:
 - a) che E, F, C sono allineati.
 - b) che tutti i parallelogrammi aventi un lato su AB, un altro su AD e il quarto vertice su FE hanno egual perimetro.
9. Costruire un triangolo conoscendo il piede dell'altezza AH e le posizioni dei punti medi E, F dei lati AB e AC.
10. Costruire un triangolo ABC noti il lato BC e le mediane BD e CE relative agli altri due lati.
11. Dati due segmenti, costruire un meccanismo articolato che sia un quadrilatero intrecciato avente due lati eguali al primo e due eguali al secondo segmento. Luogo del punto intersezione.
[Lavori Cinderella\conica02.cdy](#)
12. Date due rette parallele e un punto interno alla “striscia” disegnare la circonferenza tangente le due rette e passante per il punto.
13. Dato un triangolo equilatero, inscrivere in esso un altro triangolo equilatero, fissato un vertice.
14. Come sopra per un quadrato.
15. Data una circonferenza e un punto su di essa disegnare un diametro che sottende un angolo dato in un dato punto. ????
16. Costruire un triangolo rettangolo data l'altezza relativa all'ipotenusa, due punti sull'ipotenusa e un punto su ciascuno dei due cateti.
17. Costruire una circonferenza di dato raggio, tangente ad una circonferenza data e con il raggio su una data retta.

“Il sapere inizia con la definizione dei termini”

Socrate

Un **teorema** è un'affermazione che ha una dimostrazione basata su un dato insieme di postulati e di altri teoremi dimostrati in precedenza

Un **problema** (in Euclide) richiede che una certa entità geometrica (punto, retta, triangolo, circonferenza, luogo geometrico,...) sia creata a partire da un certo insieme di enti analoghi. La soluzione del problema è la **costruzione**.

Esempio: Costruire una circonferenza dato il raggio r , un punto P e una tangente l .

La costruzione ha la forma di una ricetta, un **algoritmo** per i più formali.

Esempio: Costruire una circonferenza dato il raggio r , un punto P , una retta tangente l e una circonferenza tangente.

Esempi

1° criterio di congruenza

LAL

2° criterio di congruenza

ALA

3° criterio di congruenza

LLL

... e conoscendo due lati e l'angolo
opposto ad uno di essi?

<E:\Appunti Rende\CaR Files\ambiguo.zir>

Esempi

1. Costruire un triangolo dati due
lati e l'angolo tra essi
compreso. **LAL**

2. Costruire un triangolo dati un
lato e gli angoli ad esso
adiacenti. **ALA**

3. Costruire un triangolo dati i tre
lati. **LLL**

Teoremi (Difficoltà crescente)

Se un triangolo ha due altezze
eguali esso è isoscele. ?

Se un triangolo ha due mediane
eguali esso è isoscele. ??

Se un triangolo ha eguali le
bisettrici di due angoli (interni), il
triangolo è isoscele. ???
(Teorema di *Steiner-Lehmus*)

Problemi

Costruire un triangolo avente due
altezze eguali.

Costruire un triangolo avente due
mediane eguali.

Costruire un triangolo avente due
bisettrici eguali.

Altri esempi di costruzioni. Esplorazioni e congetture

Inverso del teorema di Pitagora.

<C:\Documents and Settings\Pontorno Enrico\Documenti\SSIS UD 2007\invPitag.zir>

- Il biliardo triangolare. Triangolo ortico. Cammino minimo.
- Spirale di Teone. MACRO-ISTRUZIONI
- Costruire un quadrato essendo nota la somma *diagonale + lato*.
- Costruire un quadrato essendo nota la differenza *diagonale – lato*.
- Costruire un quadrato noti un vertice e il punto medio di un lato.
- Sia dato un triangolo equilatero di lato l . Qual è la minima lunghezza d di un «pennello» (segmento) con il quale dipingere la superficie del triangolo, se i suoi estremi sono vincolati a muoversi lungo i lati del triangolo?

Luoghi geometrici: vedere con gli occhi o ... con l'occhio della mente?

Asse di un segmento e bisettrice di un angolo: prendi due, paghi uno?

- Il triangolo con due vertici rispettivamente su due rette. Luogo del terzo vertice (*Leonardo da Vinci*).
<C:\Documents and Settings\Pontorno Enrico\Documenti\SSIS UD 2007\Lavori Cinderella\ellisselLV.html>
- Meccanismo (Inversore) di Peaucellier.
<E:\Appunti Rende\Lavori Cinderella\peaucellier.html>
<E:\Appunti Rende\Lavori Cinderella\peaucellier.html>
- Un punto M percorre una circonferenza. Lo si unisca a due punti fissi A e B sulla circonferenza. Su AM a partire da A , e su BM a partire da B , si riportino due lunghezze costanti $AC=m$ e $BD=n$. Trovare il luogo geometrico del punto medio di CD .
- In un triangolo ABC , inscritto in una circonferenza, si conducono l'altezza da B e la bisettrice da C . Qual è il luogo del punto d'intersezione delle due rette, mantenendo fissi A e B , C variando sulla circonferenza?
- Dal centro O di un cerchio circoscritto al triangolo ABC si conduce una parallela ad AB che incontra AC in E ; la perpendicolare abbassata da O su AB incontra in F la perpendicolare da A su AC . Dimostrare che la retta EF è parallela a BC .

RENDE

1. Siate pronti a tutto! Ad essere

1. confessori
2. psicologi
3. fratelli maggiori o zii
4. ecc...

“Prof, come faccio a sapere di essere innamorata?”

2. L'insegnante, intellettuale di professione.

La biblioteca dell'insegnante

1. G. Polya, *La scoperta matematica*, Feltrinelli
2. G. Polya, *Come risolvere i problemi di matematica*, Feltrinelli
3. D. Hilbert, *Fondamenti della geometria*, Feltrinelli
4. AA. VV., *Enciclopedia delle Matematiche Elementari*, Hoepli
5. M. Kline, *Storia del pensiero matematico*, Einaudi
6. V. Villani, *Cominciamo da Zero*, Pitagora Ed.
7. V. Villani, *Cominciamo dal Punto*, Pitagora Ed.
8. Coxeter-Greitzer *Geometry Revisited* MAA
9. Courant-Robbins *Che cos'è la matematica* Bollati

“Date agli allievi il gusto della loro intelligenza” (Silvio Ceccato)

- Quindi...la geometria! Insegnate geometria e vi saranno grati.
- Concetti geometrici e greco antico.
- Poliedri. Etimologia. πολυσ-εδρον . La lettura del *Timeo* di Platone: i triangoli «belli» e la composizione della materia in 4 elementi.



La «grecità» non pervenne mai all'unità, né quando fiorirono le egemonie d'Atene, Tebe, Sparta né quando le grandi potenze ai quattro punti cardinali, Persiani, Macedoni, Cartaginesi o Romani minacciarono di distruggerla. Nessuna lega durò a lungo perché i Greci, rivali inesauribili sulle rive del mare, si limitarono, come Alcibiade, a sognare un impero unitario. Città e reami da quattro soldi si detestavano fortemente, così come i filosofi. Tuttavia le coste si ellenizzano, i bordi dei tre continenti Asia, Africa, Europa, parlano greco. Ma la lingua comune del commercio navale muore, come tutte le egemonie brevi, le scuole, i piccoli dei, come quella che chiamiamo economia. Nulla di nulla resterà. Questo crollo si chiama Antichità. Tuttavia, in meno di quattro secoli, da Talete di Mileto a

Euclide d'Alessandria, e che essi lo volessero o no, i pensatori greci, rivali in tutto, hanno costruito, insieme, in modo fulmineo e inatteso, un Impero invisibile e unico la cui grandezza senza decadenza perdura fino a noi, un edificio senz'altro esempio nella storia dove essi ancora ci conducono, a più di due millenni di distanza, a lavorare secondo i loro stessi gesti e senza abbandonarlo, nonostante la confusione delle nostre lingue e l'accrescersi delle nostre rivalità.

L'Umanità ha mai fatto un simile accordo?

Questo successo ha nome matematica.

(Michel Serres, in <http://archipress.org/episteme/gnomon.htm>)

Visualizzazione in 3D

Omaggio a Margherita

“Ciò che si vede non sempre è ciò che è”

Come vedreste un cubo inscritto in una sfera da un punto di vista ortogonale ad una faccia del cubo?

<C:\Documents and Settings\Pontorno Enrico\Documenti\DocMAPLE\cubosfer.mw>

Problemi.

Polya e i tacchini del nonno. (\$?67.9?)

Problemi semplici

ovvero mescolare algebra e geometria:

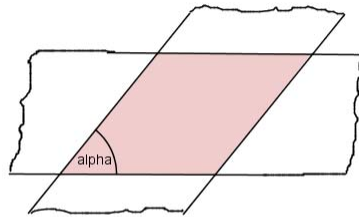
- le strette di mano.
<E:\Appunti Rende\Lavori GSP\strettedimano.gsp>
- Un triangolo ha i lati che misurano 11, 15, k (k naturale). Quali sono i valori di k per i quali si ha un triangolo ottusangolo?
CaR Files\k_15_11.zir
- Le medie
<E:\Appunti Rende\medie.pdf>
<E:\Appunti Rende\Lavori GSP\medieCS.gsp>

La 1^a (... e 3^a) legge di Keplero, Feynman e la geometria dinamica.

<E:\Appunti Rende\Lavori GSP\feynman.gsp>

Problemi “difficili”

- Calcolare l'area della superficie “intersezione” di due nastri di lunghezza unitaria inclinati di un angolo α .
- Due parole sulla trigonometria
<E:\Appunti Rende\Lavori Cinderella\trigonom.cdy>



- Dimostrare che due vertici opposti di un parallelogramma sono equidistanti dalla diagonale degli altri due vertici.
- Una torta di raggio R è poggiata su un piatto avente lo stesso raggio. Una fetta della torta viene servita su un piattino di raggio r . Quanto deve essere, al minimo, r per contenere l'intera fetta?

Geometria analitica: un'altra geometria?

“La geometria analitica tratta i problemi geometrici con l'ausilio dell'Analisi, il legame tra Geometria ed Analisi essendo posto dalle coordinate.

Nello studio analitico di una questione o di un problema di geometria, possono distinguersi essenzialmente tre momenti:

- *Messa in equazione della questione o del problema.*
- *Deduzione delle equazioni ottenute precedentemente di altre che siano loro conseguenza, o, in particolare, risoluzione di dette equazioni.*
- *Interpretazione geometrica dei risultati analitici conseguiti.*

Cosa si intende per «equazione» di una curva?

Esempi con GeoGebra.

- L'equazione della retta ... à la Klein
- L'equazione della retta ... a modo mio.
E:\Appunti Rende\my_retta.pdf
- L'equazione della retta ... in altro modo
- L'equazione di una conica: dalla forma generale all'equazione canonica.

Introduzione allo studio delle coniche

Si definiscano 6 parametri a, b, c, d, e, f e si scriva l'equazione

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

1. Come devono essere presi a, b, c, d, e, f affinché l'equazione (1) rappresenti una circonferenza?
2. Stabilite le condizioni al punto 1, quali saranno le coordinate del centro e la misura del raggio?
3. La funzione $f(-1.5, -1.5, 0.5, 2, -3, 5)$ rappresenta una circonferenza? Perché?
4. La funzione $f(-1.5, -1.5, 0, 2, -3, 5)$ rappresenta una circonferenza? In caso di risposta affermativa, quali sono le coordinate del centro e il raggio?
5. Affinché la funzione $f(5, 5, 0, D, E, 5)$ rappresenti una circonferenza, quale condizione deve legare D e E ?
6. Assegna valori opportuni a D, E, F affinché la funzione $f(1, 1, 0, D, E, F)$ rappresenti una circonferenza con centro nell'origine.
7. Assegna valori opportuni a D, E, F affinché la funzione

$f(1,1,0,D,E,F)$ rappresenti una circonferenza con centro sull'asse x e passante per l'origine.

8. Assegna valori opportuni a D , E , F affinché la funzione $F(1,1,0,D,E,F)$ rappresenti una circonferenza con centro sull'asse y e passante per l'origine.
9. Assegna valori opportuni a D , E , F affinché la funzione $F(1,1,0,D,E,F)$ rappresenti una circonferenza con centro nel I quadrante e tangente ad entrambi gli assi.
10. ecc...