Esempio di svolgimento della prova di Geometria proiettiva (metà dell'esame) del 28 giugno 2011

(A) In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, sono assegnati: il piano α, di equazione $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, ed il punto O = [1,0,0,0]. Per ogni punto P = [a_1,...,a_4], trovare le coordinate del punto $P' = J(O,P) \cap \alpha$, e verificare che l'applicazione di proiezione

$$\pi_O: \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{R}),$$

definita ponendo

$$\pi_O(P) = P',$$

è una proiettività degenere[1]; in particolare, mostrare che esiste un punto che non ha immagine.

(punti 9)

La retta che congiunge i punti O e P ha equazioni parametriche

$$X = \lambda O + \mu P = [\lambda + \mu a_1, \mu a_2, \mu a_3, \mu a_4]. \qquad (1)$$

Il punto P' si ottiene per i valori dei parametri λ, μ per cui è

$$\lambda + \mu a_1 + \mu a_2 + \mu a_3 + \mu a_4 = 0$$

cioè per

$$\lambda = -\mu(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$$

Mettendo questo valore in (1) si ricava

$$P' = \left[-\mu(a_2 + a_3 + a_4), \mu a_2, \mu a_3, \mu a_4\right] = \left[-(a_2 + a_3 + a_4), a_2, a_3, a_4\right].$$

Scrivendo le coordinate come vettori colonna, si ha

$$\pi_O : \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -a_2 - a_3 - a_4 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}.$$

Nella matrice associata a π_O la prima colonna è il vettore **0,** quindi la matrice è singolare. Moltiplicando quella matrice per il primo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^4$ si ottiene il vettore **0**, a cui non corrisponde nessun punto in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$: quindi, non esiste l'immagine del punto A_1= [1,0,0,0].

(B)

1. Scrivere la proposizione duale di:
   "nello spazio $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, dati un piano π ed una retta *r*, che non è contenuta in π, per ogni punto *P*, che appartenga a π e <u>non</u> appartenga ad *r*, esiste una sola retta che passa per *P* ed è complanare con *r*."
2. Dimostrare una delle due proposizioni.

(punti 5 + 4)

Facoltativo: la proposizione enunciata in B.1 resta vera se si sostituisce $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ con $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$? Motivare la risposta.

1. Nello spazio $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, dati un punto *P* ed una retta *r*, che non contiene *P*, per ogni piano π, che contenga *P* e <u>non</u> *r*, esiste una sola retta che giace in π ed interseca *r* in un punto."

2. Dimostrazione di B.1. Poiché *r* non è contenuta in π, il loro spazio congiungente è $\mathbb{P}^3$. Dalla formula di Grassmann si ricava che la dimensione del sottospazio $r \cap \pi$ è 0, cioè il sottospazio è un punto, che indichiamo con *Q.* I due punti *P, Q* hanno come congiungente

[1] Cioè, la matrice ad essa associata è singolare

una retta *s.* Ancora per la formula di Grassmann, le due rette *r, s,* avendo in comune il punto *Q*, hanno come spazio congiungente un piano.

La proposizione B1 non è valida nello spazio affine. Infatti, se la retta *r* è parallela al piano π, allora esistono infinite rette per *P* che sono complanari con *r* : sono le rette che congiungono i punti di *r* con *P*.

(C) Stabilire, con un breve ragionamento, se sia vero che le equazioni, dipendenti da un parametro reale *k,*

$$4x^2+6xy-4y^2+2kx+1=0$$

definiscono delle coniche che sono tutte (qualunque sia *k*) tra loro affinemente equivalenti.
Determinare i centri di quelle coniche della famiglia per cui è possibile e descrivere la curva a cui appartengono i centri.
Rappresentare e studiare, per ciascuna conica per cui è possibile, l'involuzione dei diametri coniugati, ricavandone le equazioni degli eventuali asintoti delle coniche.

(punti 4 + 4 + 4)

Indicata con $\mathbf{A}(k)$ la matrice dei coefficienti delle equazioni, si ha $\det(\mathbf{A}(k))=-25+4k^2$, quindi per $k=\pm 5/2$ si ottengono due coniche specializzate, che non sono proiettivamente, perciò neppure affinemente, equivalenti alle coniche corrispondenti agli altri valori di *k.* L'affermazione contenuta nella prima parte di (C) è falsa.
Poiché l'invariante quadratico A_{33} ha segno costante negativo, sono affinemente equivalenti tutte le coniche che si ottengono per i valori di *k* diversi da $\pm\frac{5}{2}$.
I centri di queste iperboli si ottengono risolvendo il sistema lineare di due equazioni

$$(2) \qquad \begin{cases} 4x+3y+k=0 \\ 3x-4y=0 \end{cases}.$$

Poiché la seconda equazione del sistema non dipende da *k,* i centri appartengono alla retta di equazione $3x-4y=0$. Allo stesso risultato si arriva osservando che le soluzioni del sistema (2), cioè le coordinate dei centri delle iperboli e dei punti doppi delle due coniche degeneri, sono date da

$$(3) \qquad x=-\frac{4}{25}k,\, y=-\frac{3}{25}k\,.$$

Le (3) sono equazioni parametriche (nel parametro *k*) di una retta.
Per *k* diversi da $\pm\frac{5}{2}$, il diametro coniugato del punto improprio [a,b,0] ha equazione

$$(4) \qquad (4a+3b)x+(3a-4b)y+ka=0\,.$$

Imponendo che questo diametro contenga il punto improprio [a',b',0] si ottiene l'equazione dell'involuzione dei diametri coniugati, che è la stessa per tutte le iperboli non degeneri della famiglia:

$$(4a+3b)a'+(3a-4b)b'=4aa'+3(ab'+a'b)-4bb'=0\,.$$

Gli asintoti sono dati dagli elementi uniti di questa involuzione, cioè corrispondono ai punti impropri che soddisfanno l'equazione

$$4a^2+6ab-4b^2=0\,,$$

ovvero per $\frac{a}{b}=\frac{1}{2},\ \frac{a}{b}=-2.$. Ponendo questi valori nella (4) si ottengono le equazioni degli asintoti (a coppie perpendicolari: le iperboli sono tutte equilatere)

$$5x-\frac{5}{2}y+\frac{k}{2}=0,\ \ 5x+10y+2k=0\,.$$