Linguaggi e rappresentazioni nella formazione degli insegnanti di matematica

Margherita D'Aprile
Dipartimento di Matematica
Università della Calabria

Pier Luigi Ferrari
Dipartimento di Scienze e Tecnologie Avanzate
Università del Piemonte Orientale

Riassunto

Vengono illustrate alcune posizioni teoriche sul ruolo di linguaggi e rappresentazioni in educazione matematica, in un quadro che valorizza i rapporti fra comunicazione e apprendimento matematico. Vengono discusse le funzioni che la competenza linguistica degli studenti gioca nell'apprendimento e le richieste che tutto questo pone agli insegnanti, sul terreno delle loro conoscenze, convinzioni e atteggiamenti. Sono infine presentati e discussi alcuni risultati di un'indagine svolta nell'ambito della Scuola di Specializzazione per l'Insegnamento Secondario dell'Università della Calabria.

Summary

Theories about the impact of languages and representations on mathematical education are briefly presented, with emphasis on relationships between communication and learning. The role of linguistic skills in learning mathematics and the resulting need for teachers to adjust their knowledge, beliefs and attitudes are discussed. The paper presents and discusses the results of a study focusing on prospective teachers at the University of Calabria.

Educazione matematica, linguaggi e rappresentazioni

Educazione matematica e comunicazione

Negli ultimi anni una numero notevole di ricerche ha preso in esame il ruolo dei linguaggi nel fare e comunicare matematica. Tale attenzione può essere attribuita a diversi fattori, quali l'esigenza di insegnare matematica a gruppi di studenti appartenenti a gruppi etnici e linguistici diversi o, all'interno di uno stesso gruppo, con competenze linguistiche fortemente differenziate. Diverse ricerche hanno preso in esame le difficoltà di apprendimento della matematica attribuibili al linguaggio; è stato messo in evidenza come alcune caratteristiche del linguaggio matematico[1] (come ad esempio quelle della notazione algebrica) siano tali da ostacolare l'apprendimento. Anche se alcune di tali caratteristiche dipendono dalle tradizioni didattiche ed editoriali, e possono quindi essere eliminate, altre non sono arbitrarie ma rispondono ad esigenze effettive della matematica, e in particolare a quella di applicare algoritmi (come il calcolo aritmetico o algebrico). Il problema può essere affrontato trascurando le esigenze di comunicazione, come è avvenuto e avviene in alcuni casi (ad esempio, in molti libri di testo), oppure cercando di eliminare le specificità del linguaggio matematico. Quest'ultima opzione ha ottenuto consensi di recente ma presta il fianco a diverse obiezioni, in quanto è costretta a trascurare sia le ragioni storiche delle notazioni matematiche, sia le funzioni del linguaggio nel fare e comunicare matematica. È quindi necessario rendersi conto che apprendere la matematica significa anche imparare a usarne, in qualche misura, il linguaggio. Questo sposta la discussione su un piano molto più concreto suggerendo due questioni basilari. La prima è il riconoscimento delle caratteristiche di tale linguaggio che sono veramente funzionali alle esigenze della disciplina. La seconda è l'individuazione delle competenze linguistiche che ai vari livelli sono richieste per utilizzare efficacemente tale linguaggio, e dei metodi per favorirne lo sviluppo.

Matematica come discorso

Negli ultimi anni diverse ricerche hanno messo in luce la dipendenza delle prestazioni in matematica da un gran numero di fattori anche extramatematici in precedenza trascurati. Progressivamente sono stati messi in luce i limiti delle pratiche didattiche fondate sull'acquisizione individuale di contenuti matematici. In particolare è stato messo in discussione il paradigma dell'apprendimento come acquisizione e sono stati sperimentati altri percorsi che hanno interpretato la formazione matematica come un processo di costruzione collettivo. Gli aspetti

[1] Utilizziamo la locuzione 'linguaggio matematico' nella sua accezione più ampia, includendo sia la componente verbale, sia quella simbolica o grafica.

culturali e gli usi sociali della matematica sono stati valorizzati rispetto alla visione tradizionale di matematica come disciplina separata e paradigma di sapere stabile e astratto. In quasi tutte le proposte didattiche coerenti con questa impostazione momenti di interazione e comunicazione all'interno e all'esterno delle classi hanno giocato ruoli fondamentali. In questo quadro il pensiero è interpretato come una forma di comunicazione e l'apprendimento della matematica diventa l'iniziazione a un particolare tipo di discorso[2]. Questo orientamento è stato denominato in vari modi, fra i quali uno dei più suggestivi è 'matematica come discorso'. In un approccio di questo tipo le competenze linguistiche degli studenti assumono un ruolo molto maggiore. In un'ottica platonista per cui i concetti matematici esistono indipendentemente dai testi che li descrivono o dalle persone che li utilizzano, il problema del linguaggio può anche essere rimosso o aggirato, nell'illusione di poter usare forme linguistiche particolarmente semplici o di sfruttare le potenzialità di rappresentazioni con immagini offerte dalle nuove tecnologie. Anche posizioni recenti e di orientamento opposto, come quelle riferibili alla teoria del cosiddetto 'embodiment' o ad altre teorie sviluppate da G. Lakoff[3] insieme ad altri, non attribuiscono un'importanza equivalente ai linguaggi. Ma in un'ottica discorsiva secondo cui il pensiero è una forma di comunicazione, la qualità del pensiero, per quanto legata a fattori percettivi, risulta strettamente legata anche alla qualità della comunicazione che a sua volta è influenzata dalla qualità del linguaggio adottato. In quest'ultimo caso alle questioni poste alla fine del punto precedente si aggiunge quella delle caratteristiche linguistiche che possono sostenere lo sviluppo del pensiero e quelle che possono invece ostacolarlo.

Competenze linguistiche e apprendimento della matematica

Se si analizzano le caratteristiche dei linguaggi usati nel fare e comunicare matematica si vede che molti di essi hanno proprietà in comune con i registri evoluti del linguaggio ordinario; questo vale in forma estrema per la notazione algebrica. Queste proprietà sono in gran parte motivate dalle funzioni che il linguaggio svolge nel fare e nel

[2] Questo tema è stato sviluppato con molta chiarezza da Sfard (2001).

[3] Si vedano ad esempio Lakoff & Johnson (1999) e Lakoff & Núñez (2000). Una discussione critica di queste posizioni va al di là degli scopi di questo lavoro.

comunicare la matematica. Da questo segue da un lato che è illusorio pensare di far apprendere l'uso del linguaggio matematico a soggetti che non abbiano una certa padronanza dei registri evoluti del linguaggio ordinario, dall'altro che non è ragionevole introdurre l'uso del linguaggio matematico se non come risposta a esigenze funzionali esplicite e condivise dagli studenti. La semplice aggiunta di alcune conoscenze lessicali e di qualche convenzione logica non trasforma un registro colloquiale in un registro matematico.
Per questo è necessario procedere alla costruzione di competenze linguistiche appropriate per la matematica come risposta a specifici vincoli comunicativi e di rappresentazione imposti dal contesto (e non come conformità a un modello). Tali vincoli devono essere non solo capiti, ma anche condivisi dagli studenti[4].
Un altro aspetto, proprio del sistema scolastico italiano e probabilmente di altri sistemi scolastici, è la netta separazione fra educazione linguistica ed educazione scientifica, che è verosimilmente la causa del fatto che in contesto matematico molti studenti non utilizzano le competenze linguistiche che pure dimostrano di possedere in altri contesti. Il superamento di questa separazione richiede una maggior collaborazione fra gli insegnanti delle due aree, rendendo il linguaggio matematico oggetto di riflessione linguistica alla stessa stregua degli altri linguaggi.

Il ruolo degli insegnanti

Insegnanti e comunicazione

Qualunque quadro teorico venga adottato, gli insegnanti hanno comunque un ruolo decisivo sul piano della comunicazione. Se si adotta la prospettiva della matematica come discorso, agli insegnanti tocca il compito più complesso di promuovere, indirizzare e coordinare le interazioni fra gli alunni, con lo scopo di favorire lo sviluppo del pensiero. In ogni caso saranno richiesti di favorire la comunicazione nella classe, utilizzando e promuovendo usi linguistici ampiamente accessibili e tali da non creare ostacoli inutili. In molti libri di testo per la secondaria, ad esempio, è utilizzato ancora un lessico inutilmente pedante, tale da ostacolare lo sviluppo del pensiero. Lo stesso vale per

[4] Un esempio di attività di questo tipo è stato illustrato da Ferrari (2003).

forme linguistiche stereotipate, o gergali, che spesso hanno la sola funzione di richiamare alla memoria procedimenti. Allo stesso tempo, anche attraverso attività specifiche, gli insegnanti dovranno promuovere usi accurati dei linguaggi. Troppi studenti alla fine della secondaria sono convinti che il linguaggio adottato non abbia importanza e che non valga la pena di impegnarsi nella costruzione o nell’interpretazione dei testi.

L’esigenza di alleggerire il linguaggio adottato e quella di renderlo più accurato possono sembrare contraddittorie. Si tratta invece di rendere il linguaggio adeguato alle funzioni che deve svolgere. Un’analisi accurata e completa delle funzioni dei linguaggi nelle fasi del processo di costruzione del pensiero non è ancora disponibile. Alcuni lavori di Radford (2000, 2002) contengono tuttavia idee rilevanti a questo riguardo. Considerazioni interessanti sulla diversità di funzioni fra il linguaggio parlato e quello scritto sono state sviluppate da Duval (2000). Esempi di inaccuratezze linguistiche funzionali al processo di costruzione del pensiero sono stati illustrati da Ferrari (2003).

Sulla base dei dati disponibili e del buon senso, sembra ragionevole ipotizzare che alcune fasi della costruzione del pensiero richiedano forme linguistiche flessibili, dipendenti dal contesto, non troppo precise o pianificate. In queste fasi sono spesso preziose le caratteristiche del linguaggio parlato, con la possibilità di precisare e correggere progressivamente i testi, anche attraverso processi di verifica e di negoziazione collettiva. Altre fasi, come la comunicazione, la raccolta e la sistematizzazione delle conoscenze, richiedono probabilmente forme linguistiche più evolute, che consentano l’utilizzo dei testi anche da soggetti estranei al contesto in cui sono stati prodotti, o in tempi successivi dagli stessi soggetti che li hanno prodotti.

Requisiti per gli insegnanti

Sulla base di queste considerazioni è evidente che gli insegnanti di matematica dovranno possedere competenze linguistiche che li mettano in grado di produrre testi (parlati e scritti) chiari ed efficaci sul piano della comunicazione. Dovranno anche essere in grado di interpretare i testi prodotti dagli alunni, senza limitare la propria analisi al rilevamento degli errori formali. Questo riguarda in parte le conoscenze degli insegnanti ma soprattutto le loro convinzioni. Gli insegnanti di matematica dovranno infatti essere convinti dell’importanza dei linguaggi in matematica, rigettando consapevolmente la convinzione

diffusa che la sfera linguistica e quella scientifica siano irreversibilmente separate. D'altro canto dovranno anche essere convinti dell'opportunità di usi flessibili dei linguaggi, senza credere che la specificità della matematica vada difesa con l'adesione a canoni linguistici rigidi.
Questo richiede fra l'altro, come già osservato, una buona collaborazione con gli insegnanti di area linguistica. Anche questo richiede mutamenti profondi nelle convinzioni e negli atteggiamenti degli insegnanti, prima ancora che nelle loro conoscenze.

Un'indagine esplorativa

Organizzazione dell'indagine

L'indagine che illustriamo nel seguito dell'articolo è stata svolta nell'ambito della Scuola di Specializzazione per l'Insegnamento Secondario dell'Università della Calabria. Scopo dell'attività è stato la raccolta di informazioni sulle conoscenze, convinzioni, atteggiamenti dei futuri insegnanti circa i rapporti fra matematica e linguaggi, insieme con il tentativo di intervenire per sensibilizzare i corsisti al problema e fornire loro alcuni strumenti per affrontarlo. Data la scarsità di esperienze di formazione degli insegnanti in relazione al linguaggio della matematica e compatibili con le analisi del punto precedente, sia l'indagine sia le attività svolte hanno avuto un carattere esplorativo. All'inizio del corso abbiamo presentato un questionario[5] abbastanza aperto, con lo scopo di raccogliere le informazioni di tipo diverso di cui si è detto sopra. Successivamente sono state svolte alcune attività didattiche sul ruolo dei linguaggi in matematica e sulle differenze fra linguaggio comune e linguaggio matematico. Dopo queste attività i corsisti sono stati sottoposti a due ulteriori prove. La prima[6] ha richiesto loro di scegliere tra quattro problemi i due più adatti a valutare, in studenti di scuola superiore, la capacità di comprendere ed usare formule matematiche; la seconda[7] ha chiesto di riscrivere un testo matematico (la dimostrazione di un teorema di geometria) in modo da renderlo comprensibile a uno studente del secondo o del terzo anno di secondaria superiore. Infine, a conclusione del corso, abbiamo chiesto agli studenti

[5] Appendice A
[6] Appendice B
[7] Appendice C

di esporre in breve i loro punti di vista sul rapporto matematica-linguaggio.

Risultati del questionario iniziale

Il questionario iniziale è stato elaborato da 37 specializzandi, di cui 22 iscritti nella classe di abilitazione 49A (Matematica e Fisica) e 15 nella 48A (Matematica applicata). Nel campione, i laureati in matematica sono 23, quelli in fisica sono tre, nove sono laureati in ingegneria e due in scienze statistiche. L'età media dei laureati in ingegneria (29) è maggiore di quella dei restanti studenti (25.5).

Consapevolezza delle difficoltà

Come già accennato, le domande del questionario sono state non calibrate sulla base di ipotesi precise ma rivolte a suscitare reazioni osservabili da parte dei corsisti. Le domande 1, 2[8], 3 del questionario iniziale sono state inserite soprattutto per valutare la sensibilità dei corsisti rispetto ai linguaggi. A questo proposito emerge una certa sottovalutazione delle difficoltà. Ad esempio, riguardo la domanda 3 (*"Se ritenete che esistano, indicate parole per le quali possano effettivamente verificarsi equivoci tra il significato quotidiano e quello adottato in matematica"*), poco meno della metà dei corsisti non indicano alcuna parola equivoca. Alcuni non riescono a trovarne, attribuendo il loro insuccesso all'abitudine "a pensare in termini matematici", ma la maggior parte di loro sembrano poco interessati dalla domanda, e qualcuno, a titolo di spiegazione, afferma di essere laureato in matematica.

Collocazione delle difficoltà

I problemi 4 e 5 sono stati inseriti soprattutto per valutare la disposizione ad attribuire ai linguaggi eventuali insuccessi degli studenti. Il problema 4 è una variante dei problemi proposti da Bloedy-Vinner (1996) per valutare i cosiddetti *fenomeni analgebrici*. In base alla documentazzione disponibile, risulta che questi problemi creano serie difficoltà nella

[8] la domanda 1 è una citazione dal Quaderno 19/2 del M.P.I, '*L'insegnamento della geometria – Seminario di formazione per Docenti. Scuole Medie Superiori,* 1995-96, Lucca; l'esercizio 2 è tratto dalla ristampa del 1992 della seconda edizione del classico F. Enriques – U. Amaldi, *Elementi di Geometria*, parte seconda, Zanichelli, Bologna.

transizione fra il testo scritto e la formula, che vengono spiegate in termini delle diverse caratteristiche dei due codici.
La maggior parte dei corsisti hanno scritto, anche se non richiesti, una formula corretta. Nessuno ha scritto formule sbagliate. Rispetto all'analisi delle difficoltà, le risposte sono suddivise in 3 gruppi, all'incirca della stessa consistenza, con alcune sovrapposizioni. Un gruppo, seppure con imprecisioni e a fatica, ha individuato la costruzione della formula come un punto di difficoltà; un altro gruppo ha collocato la difficoltà a livello di contenuti matematici specifici (quasi tutti, la presenza di un dato percentuale); i corsisti dell'ultimo gruppo non hanno risposto o hanno risposto che non ci sono difficoltà o hanno proposto di riformulare il problema a modo loro.
La difficoltà del problema 5 sta nel fatto che i soggetti a cui viene sottoposto (in genere, matricole di Informatica nell'ambito di un corso di Algebra) riconoscono la condizione sulle radici complesse come punto focale, e la trattano con il massimo di accuratezza; quasi nessuno di costoro ha difficoltà nel riconoscere che la condizione implica l'esistenza di due radici complesse non reali. Le altre condizioni sono probabilmente giudicate secondarie e sono interpretate quindi in base agli schemi del linguaggio quotidiano. Se si assegna lo stesso problema eliminando la condizione (4) e chiedendo che il polinomio richiesto sia di grado 2, la maggior parte del campione risponde correttamente. Probabilmente quegli studenti, non più preoccupati dal richiamo ai complessi, trattano le inclusioni fra gli insiemi numerici come focali e le interpretano in base all'usuale semantica matematica[9].
Riguardo alla nostra indagine, più di metà dei corsisti ha attribuito il comportamento degli studenti alla mancata conoscenza delle relazioni $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$. Circa un quinto del campione ha fatto riferimento alla formulazione del problema, e in particolare alla mancata corrispondenza biunivoca tra le condizioni e gli enunciati che le esprimono. Un numero analogo di corsisti ha attribuito i comportamenti all'incapacità degli studenti di affrontare più condizioni contemporaneamente, con riferimento implicito alla complessità del problema o a quella del testo.
Al di là del fatto che pochi corsisti hanno individuato interpretazioni credibili, il che poteva essere al di là delle loro possibilità del momento,

---

9 I risultati di questo secondo esperimento sono stati comunicati ai corsisti soltanto dopo lo svolgimento della prova iniziale.

rimane la loro forte dipendenza da interpretazioni basate sui contenuti. Questo è un modello interpretativo molto diffuso anche fra i matematici e gli insegnanti di matematica, che conserva una certa popolarità nonostante sia poco funzionale nell'interpretare le difficoltà degli studenti di ogni livello scolare e, soprattutto, suggerisca spesso scelte didattiche inadeguate.

Il ruolo delle rappresentazioni grafiche

Il problema 6 mette in gioco questioni cruciali circa l'uso del linguaggio matematico, con particolare riferimento alle rappresentazioni iconiche. Come un qualsiasi testo, anche un grafico per essere interpretato richiede dei criteri che dipendono in qualche misura da interlocutori e contesto. L'unica risposta che si può dare senza fare riferimento a tali criteri è che la (i) è falsa. Sulla base di convenzioni di lettura dei grafici abbastanza diffuse nel contesto scolastico e in altri contesti (ma non in tutti) è possibile riconoscere che sono vere le affermazioni (iii) e (vi)[10].
Tutte le altre affermazioni sono indecidibili senza ulteriori ipotesi sui rapporti fra il grafico e il contesto.
Ben oltre metà dei corsisti hanno risposto che sono false le affermazioni (i) e (iv) e che sono vere tutte le altre, o variazioni di una risposta su questo schema. Questa risposta assume implicitamente che la porzione di grafico rappresentata sia adeguata per rappresentare la funzione su tutto l'asse reale. Tale assunzione è evidentemente di tipo pragmatico: è comune, nella vita quotidiana e anche in contesto scolastico, ipotizzare che le affermazioni e le rappresentazioni che si ricevono siano adeguate rispetto agli scopi identificabili. Ricavare dal grafico che f è crescente in $(0, +\infty)$ è un'operazione di questo tipo. La figura non mostra l'andamento di f per $x>2$, ma molti corsisti hanno ritenuto che fosse crescente perché, in caso contrario, la rappresentazione fornita sarebbe risultata inadeguata allo scopo di rappresentare f e di rispondere alle domande. Solo poco più di un quarto dei corsisti ha proposto la sequenza di risposte corrette, con al più una sola sbagliata. I rimanenti hanno fornito risposte non chiaramente identificabili, generalmente intermedie fra i due modelli o con molte risposte mancanti. Ha creato perplessità la formulazione del punto (viii): infatti per alcuni corsisti la congiunzione

[10] È evidente che se, ad esempio, fosse $f(1)=0.001$ non sarebbe possibile accorgersene dal grafico.

appropriata sarebbe stata la ‘e’, in luogo della ‘o’; anche questo è un comportamento spiegabile pragmaticamente in termini di ipotesi sull'adeguatezza del testo.
Le domande 7-8-9 propongono alcune “dimostrazioni senza parole”[11] tra le più citate e, ritenevamo, più semplici. La quasi totalità degli specializzandi, esprimendo perplessità, difficoltà, scarsa comprensione o addirittura rifiuto per questi quesiti, ha mostrato di aver avuto scarse occasioni di utilizzare rappresentazioni di questo tipo durante la sua formazione e di aver interiorizzato il tradizionale invito a diffidare dalle figure ingannevoli o parziali come bando totale delle rappresentazioni iconiche. In particolare, su 37, dodici ritengono “non facile” la dimostrazione proposta dal quesito 9, tre non rispondono, tredici affermano che non è una dimostrazione; molti (10) la ritengono utile come completamento della “dimostrazione rigorosa”. Queste risposte sembrano dettate non solo da mancanza di conoscenze o esperienze, ma anche da convinzioni e atteggiamenti dei corsisti nei confronti delle rappresentazioni iconiche. Tali convinzioni e atteggiamenti sono il prodotto di processi di lungo termine e non sono facilmente modificabili.

Risultati delle prove successive

Dopo una lezione sul tema della complessità dei fattori che compongono e influenzano la comunicazione della matematica, è stata proposta agli specializzandi l’attività riportata nell’appendice B[12]. Lo scopo della lezione era soprattutto di sottolineare la rilevanza del problema della comunicazione e di dare qualche informazione ai corsisti. È evidente che la modifica delle loro convinzioni e dei loro atteggiamenti non poteva essere un obiettivo credibile. Ci è sembrato tuttavia interessante rilevarli in un contesto per loro profondamente mutato.
Tutti i 38 specializzandi presenti a questa prova hanno giudicato semplice, di routine il primo quesito; e nella quasi totalità non adeguato a valutare le capacità d’uso del linguaggio algebrico; infatti, solo sei lo includono nella coppia degli esercizi scelti. Complessivamente, l’esercizio 2 ha ricevuto i maggiori consensi, essendo stato scelto da 25

---

[11] Tratte da Nelsen, R. B.: 1993, *Proofs without words*, The Mathematical Association of America.

[12] I problemi 1-3 sono stati tratti da Accascina *et al.*: 1998, *La strage degli innocenti - Problemi di raccordo in matematica tra scuola e università,* Centro Ricerche Didattiche Ugo Morin, Paderno del Grappa, Giovanni Battagin Editore.

sui 35 che hanno espresso la preferenza richiesta (tre non hanno compiuto scelte). Anche l'esercizio 3 viene giudicato per lo più di routine; è singolare però che molti dei commenti si limitino a segnalare che è necessario verificare la positività del radicando, senza prestare attenzione alla eventualità di soluzioni spurie: addirittura vi è chi parla esplicitamente con una certa sufficienza, e sbagliando, della esistenza di due soluzioni. Dieci specializzandi ritengono la coppia degli esercizi 2 e 3 adeguata a valutare la comprensione e la capacità di uso delle formule, quindici specializzandi scelgono invece gli esercizi 2 e 4. Il quarto esercizio è spesso giudicato difficile, ma interessante e adatto a valutare la capacità di valutare al di fuori degli schemi; è stato incluso nella coppia in 20 scelte. Le motivazioni addotte sembrano in molti casi incoerenti con le scelte, in quanto i riferimenti ai contenuti riaffiorano in continuazione. Il richiamo a una maggior attenzione per le difficoltà di interpretazione e comprensione suona come rituale, e molti corsisti sembrano assumere che la loro formazione personale sia tale da metterli al di sopra di tali difficoltà; tale assunzione è immediatamente contraddetta ad esempio dagli errori sul problema 3. Sembra infine che i corsisti abbiano esaminato i problemi immergendosi più nel ruolo di solutori che in quello di autori di problemi; d'altra parte non è improbabile che durante la loro formazione non siano stati mai esposti a esperienze di *problem posing.*

Dopo una ulteriore lezione sul rapporto tra linguaggi e matematica, è stato proposto il test riportato nell'appendice C.

La maggioranza (circa due terzi del campione) ha rielaborato il testo dal punto di vista esclusivamente linguistico, senza rendersi conto dei punti in cui l'argomento matematico richiedeva di essere completato, come se fossero convinti che nella riscrittura del testo le questioni linguistiche siano indipendenti e separate da quelle matematiche. A parte una persona che ammette "bisognerebbe spiegare alcune proprietà della simmetria", molti hanno adottato un approccio intuitivo, oppure meramente descrittivo: "ci si accorge", "notiamo", senza mostrare di preoccuparsi di trovare argomentazioni a supporto delle affermazioni contenute nel testo. Anche chi ha cercato di fornire spiegazioni, nella quasi totalità dei casi sembra non sia riuscito ad analizzare più di uno tra i vari punti cruciali della dimostrazione. Ad esempio, alcuni hanno avvertito la necessità di dimostrare che il cammino rettilineo è il più breve tra quelli che congiungono due punti, perciò hanno trascurato il ruolo della figura e tentato di provare la proprietà in termini di disuguaglianze, ma hanno tralasciato completamente di esaminare l'asserto principale del testo.

In conclusione, nella maggioranza gli specializzandi hanno preso atto dell'importanza della questione (o affermano di farlo) ma hanno banalizzato i comportamenti da assumere, limitandosi a proporre gradualità, rinuncia alle parole difficili e al rigore. Solo alcuni propongono idee non vaghe.

Va notato che i testi proposti dai corsisti non sono, nella maggior parte, più accessibili del testo originario dal punto di vista linguistico. Molti testi sono, anzi, più pesanti e involuti.

Il questionario finale

Durante l'ultima ora di lezione, è stata rivolta agli specializzandi questa richiesta: "Alla luce delle lezioni e delle attività didattiche a cui ha partecipato in questo modulo, esponga brevemente (in non più di dieci righe) il suo punto di vista sul rapporto matematica-linguaggio."

In maggioranza, le 27 risposte tradiscono il desiderio di mostrare che gli insegnamenti seguiti sono stati recepiti: si nota, infatti, che vengono ripetute frequentemente certe parole "chiave" usate dai docenti durante lo svolgimento del corso (Didattica della matematica 1, suddiviso in due moduli), e precisamente:

- "*rigore, astrattezza, caratteri della matematica, collegamento con il reale"*, ricorrenti principalmente nel primo modulo, affidato ad un docente diverso da quello del modulo 2
- "*difficoltà, comunicazione, gradualità, attenzione ai significati, importanza della lettura di testi matematici"* usate durante il modulo 2 dagli autori di questo lavoro.

Il *rigore del linguaggio matematico*, spesso unito ad *astrattezza* viene indicato come un carattere essenziale della matematica da circa la metà degli specializzandi che hanno risposto al quesito. Coerentemente, una persona laureata in matematica afferma: "*ritengo opportuno cercare di abituare gli studenti al rigore del linguaggio matematico, adattando però l'intervento didattico alla situazione che si presenta*".

Questa stessa preoccupazione per la *gradualità*, con cui il rigore va perseguito, è condivisa da vari specializzandi; altri ritengono prioritari la *comprensione*, il *significato*.

L'*astrattezza* viene riconosciuta come una qualità positiva da vari corsisti: "*Il linguaggio matematico è un linguaggio astratto, costruito con simboli propri ed inventati:* [sic] *Assume importanza perché trova applicazione nel mondo reale (conserva quindi un rapporto con la realtà)*"; affermazioni simili a questa si leggono in varie risposte. Un laureato in ingegneria si limita a citare come obiettivo per la conoscenza del linguaggio matematico la "*comprensione dei libri di testo*".

Di contro, *rigore* e *astrattezza* sono indicati come cause di *difficoltà* nell'apprendimento della matematica da numerosi corsisti; altra fonte di difficoltà frequentemente citata è l'uso di termini che nel linguaggio comune hanno significato diverso da quello matematico (difficoltà non riconosciuta nel questionario iniziale!) mentre una persona laureata in matematica punta il dito su abitudini di insegnamento diffuse, proponendo con entusiasmo un po' fideistico il ricorso alla tecnologia: "*Il rapporto matematica-linguaggio è sempre stato difficile, perché a scuola non sempre si è abituati a ragionare ma a fare esclusivamente esercizi. Con l'introduzione di lezioni multimediali, l'utilizzo [di] attrezzature video e lavori in laboratori informatici si riesce a catturare maggiormente l'attenzione degli studenti. Catturando l'attenzione è più facile comunicare*."

Un'altra persona con laurea in matematica confida nel potere della lettura: "*Il "problema" è che la matematica ha un suo proprio e specifico linguaggio, talvolta arido, che porta molte persone a ritenere la matematica un mondo irraggiungibile e ostico. A mio avviso si potrebbe ovviare a tale problema insegnando ai ragazzi a leggere la matematica, frutto del pensiero umano e per niente arido*."

Complessivamente, nominano *difficoltà* connesse con il rapporto *matematica-linguaggio* più del 60% dei futuri insegnanti del campione. Il tenore di molte risposte, come indicano gli esempi riportati, fa temere però che esse siano dettate più da un'adesione diligente alle indicazioni dei docenti che a convinzioni meditate; del resto in molti casi gli specializzandi sono neo-laureati di età molto giovane, privi di esperienze didattiche in prima persona. Sarebbe interessante verificare se già durante la fase del tirocinio saranno messi in pratica buoni propositi come quelli che seguono: *"Penso che il linguaggio utilizzato da un insegnante (soprattutto di Matematica) sia fondamentale affinché il suo intervento educativo sia efficace; [...] Bisognerebbe prestare più attenzione a "come si parla"; inoltre, soprattutto in classi di grado* *inferiore, il linguaggio dovrebbe essere molto semplice, anche a costo di non essere, in alcuni casi, proprio ortodossi"*[13].

Qualche indicazione per la formazione degli insegnanti

La breve esperienza di cui abbiamo parlato qui sembra mettere in evidenza quanto sia difficile insinuare dubbi su modelli tradizionali di trasmissione del sapere ex-cathedra, e minare confortanti certezze sui requisiti sufficienti a formare un buon insegnante di matematica: la formazione disciplinare, garantita dall'aver conseguito una laurea, il ricorso sistematico al corretto linguaggio formale, l'uso (non meglio specificato) delle tecnologie.
Se può essere plausibile che molte risposte al questionario iniziale tradiscano una serena indifferenza per la problematica proposta, appare meno giustificabile, nei questionari successivi, la ritrosia a considerare contemporaneamente sia gli aspetti disciplinari che quelli linguistici, anzi, la tendenza a concentrarsi soprattutto sui primi; chiamati a riflettere sui secondi, ci si accontenta di banalizzare e parafrasare le locuzioni usate. La rigidità mostrata dai corsisti nei confronti dei riferimenti agli aspetti disciplinari pone l'esigenza di costruire (già nei corsi di studi di I livello) maggiore flessibilità e ampiezza di vedute, imparando a guardare gli argomenti matematici da punti di vista diversi e con rappresentazioni diverse. Anche alcuni passaggi canonici dell'attività matematica, come ad esempio la risoluzione dei problemi, dovrebbero essere relativizzati e messi in discussione, ad esempio attraverso attività di *trasformazione* o di *posizione* di problemi. Le attuali tendenze dei corsi di studio di area matematica sono purtroppo poco incoraggianti a questo proposito.
Ci ha colpito inoltre che gli specializzandi utilizzino il termine "difficoltà" quasi esclusivamente in relazione all'apprendimento ("per i ragazzi è difficile…"): è forse troppo presto, durante il secondo dei quattro semestri della scuola di specializzazione, aspettarsi un inizio di riflessione sulle difficoltà dell'insegnamento, oppure, al contrario, c'è da temere che i futuri insegnanti abbiano già adottata la corazza di infallibilità in cui purtroppo si chiudono tanti docenti in servizio? Questa osservazione conduce a riflettere sul più vasto problema della correlazione tra formazione iniziale e formazione in servizio degli insegnanti: come affermato da molti autori (ad esempio, Blanton (2002))

[13] In accordo con le osservazioni conclusive di Lai (2001)

lo specializzando ha già interiorizzato un modello di insegnante a cui si ispirerà nella sua pratica professionale, un modello che è il distillato degli insegnanti che, come studente, ha stimato e giudicato efficaci. L'azione dei ricercatori in didattica della matematica sulla formazione degli insegnanti non può che avere effetti limitati, se non è accompagnata da un proficuo, continuo, più esteso rapporto con gli insegnanti in servizio[14], perché l'inevitabile "imprinting" da essi lasciato sui futuri colleghi non tarpi loro le ali.

Riferimenti

Blanton, M. L.: 2002, 'Using an undergraduate geometry course to challenge pre-service teachers' notions of discourse', *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, 117-152

Blanton, M. L. & Berenson, S. B. & Norwood, K. S.: 2001, 'Using classroom discourse to understand a prospective mathematics' teacher's developing practice', *Teaching and Teacher Education,* 17, 227-242.

Bloedy-Vinner, H.: 1996,. 'The analgebraic mode of thinking and other errors in word problem solving', in Gutierrez, A. & L. Puig (eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* vol. 2, 105-112.

Boero, P. & Douek, N. & Ferrari, P. L.: 2002, 'Developing mastery of natural Language: approaches to theoretical aspects of Mathematics', *Handbook of International research in Mathematics Education,* Lawrence Erlbaum Associates, Inc, Ch. 11, 241-368.

D'Amore, B.:2000, 'Lingua, matematica e didattica', *La matematica e la sua didattica,* n. 1, 28-47.

Duval, R.: 2000, 'Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques', *Recherches en didactique des mathématiques,* 20/2, 135-169.

Ferrari, P. L.: 2003, 'Costruzione di competenze linguistiche appropriate per la matematica a partire dalla media inferiore', *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* Vol. 26A, N. 4, 469-496.

Kieran, C., Forman, E. & Sfard, A.: 2001, 'Learning Discourse: Sociocultural Approaches to Research in Mathematics Education', *Educational Studies in Mathematics,* 46, 1–12.

[14] Zan (2000a), Malara (2003); ma la preoccupazione è condivisa in ambito internazionale: "A [..] set of issues facing those who seek to improve the system of school practices involves the gap between educational research on student learning on the one hand and changes in teachers' practice on the other" (Masingila & Doerr, 2002)

Lai, M. Y.: 2001, 'Mathematics classroom language and mathematical literacy: a case study in Hong Kong', *CIEAEM'53, Mathematical literacy in the digital era,* (ed. L. Bazzini, C. Whybrow Inchley), Ghisetti e Corvi, Milano, 257-262.

Lakoff, G. & Johnson, M: 1999, *Philosophy in the Flesh,* Basic Books.

Lakoff, G. & Núñez, R. E.: 2000, *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being,* Basic Books.

Malara, N A.: 2003, 'Opinioni sull'algebra di futuri insegnanti: incidenza del retroterra culturale, *La matematica e la sua didattica,* 1, 17-41.

Malara, N. A. & Zan, R.: 2002, 'The problematic relationship between theory and practice, *Handbook of International research in Mathematics Education,* Lawrence Erlbaum Associates, Inc, Ch. 22, 553-580.

Masingila, J. O. & Doerr, H. M.: 2002, 'Understanding pre-service teachers' emerging practices though their analysis of a multimedia case study of practice', *Journal of Mathematics Teacher Education,* 5**,** 235-263.

National Council for Teachers of Mathematics: 1991, *Professional Standards for teaching mathematics*, Reston (VA).

Peressini, D. D. & Knuth, E. J.: 1998, 'Why are you talking when you could be listening? The role of discourse and reflection in the professional development of a secondary mathematics teacher', *Teaching and Teacher Education,* Vol. 14, n. 1, 107-125.

Radford, L.: 2000, 'Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis', *Educational Studies in Mathematics,* 42, 237-268.

Radford, L.: 2002, 'On heroes and the collapse of narratives: a contribution to the study of symbolic thinking', submitted to PME 26.

Sfard, A.: 2001, 'There is more to discourse than meets the ears: looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning', *Educational Studies in Mathematics,* 46, 13–57.

Zan, R.: 2000a, 'L'insegnante come solutore di problemi', *La matematica e la sua didattica,* n. 1, 48-71.

Zan, R.: 2000b, "Misconceptions" e difficoltà in matematica, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* vol. 23A, n. 1, 45-68.

Zan, R.: 2000c, 'Le convinzioni', *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* vol. 23A, n. 2, 161-197.

Zan, R.: 2000d, 'Emozioni e difficoltà in matematica', *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* vol. 23A, n. 3, 207-232, n. 4, 327-246.

Zan, R.: 2000e, 'Atteggiamenti e difficoltà in matematica', *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* vol. 23A, n. 5, 441-466.

Appendice A

E' difficile comunicare la matematica?

Scopo del questionario è aiutarci nel riflettere sulle difficoltà che più frequentemente sono incontrate da chi studia e da chi insegna matematica; in particolare, sulle difficoltà che dipendono dall'interazione tra linguaggio specialistico e linguaggio quotidiano. Perché il questionario sia uno strumento utile, è essenziale che le vostre risposte siano sincere: non dovete preoccuparvi di apparire eruditi o intelligenti, ma di essere schietti. L'elaborato deve essere anonimo, con le sole indicazioni personali richieste nella I riga.

Età:… Classe di abilitazione:….. Laurea posseduta:…………

1. Da una lezione di un corso di formazione per insegnanti:

"[…..] Indicheremo con il simbolo $\overrightarrow{(r,B)}$ il semipiano di *bordo r* che contiene il punto *B*.[…]

Definizione. Si chiama *diedro* una coppia di semipiani $\overrightarrow{(r,A)},\overrightarrow{(r,B)}$ aventi lo stesso *bordo r.* I semipiani sono detti *facce* del diedro, la retta *r spigolo* del diedro. Indicheremo tale diedro con il simbolo *(A,r,B).* […]

Definizione. Sia $(V, A_1, A_2, \ldots, A_n)$ una $(n + 1)$-upla di punti distinti, a 3 a 3 non allineati, tali che per ogni $i \in \{1, ..., n$) i punti $A_1, A_2, \ldots, A_{i-2}, A_{i+1}, ..., A_n$ appartengano allo stesso semispazio rispetto al piano di V, A_{i-1}, A_i (e quindi tra l'altro non appartengono a tale piano; per $i = 1$ conveniamo di porre $A_0 = A_n$). Detta $\overrightarrow{a_i}$ la semiretta di origine V che contiene A_i, si dice *angoloide di vertice V* la n–upla ordinata di semirette ($\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots \overrightarrow{a_n}$); le semirette sono dette *spigoli,* gli angoli $\measuredangle\,\overrightarrow{a_1, a_2}$,……, $\measuredangle\,\overrightarrow{a_{n-1}, a_n}$ sono detti *facce,* mentre (A_n, a_1, A_2), ..., (A_{n-1}, a_n, A_1) sono detti i *diedri* dell'angoloide."

a) Avete incontrato difficoltà nel costruire delle immagini mentali corrispondenti agli oggetti geometrici definiti sopra? se sì, che tipo di difficoltà e per quali cause?

b) Tracciate degli schizzi che rappresentino un diedro, un angoloide

c) Avete notato, nelle due definizioni, termini che sono usati con significato diverso nel linguaggio quotidiano? Quali?

2. Tra gli esercizi di un libro di testo classico:

"Se in un triangolo rettangolo da un punto dell'ipotenusa si abbassano le perpendicolari sui cateti, il rettangolo dei segmenti, in cui è divisa l'ipotenusa, è equivalente alla somma dei rettangoli dei segmenti, in cui ciascun cateto risulta diviso dal piede della corrispondente perpendicolare."

a) Che cosa viene richiesto al solutore?

b) Per rispondere alla domanda precedente, avete avuto bisogno di disegnare una figura?

c) Avete avuto difficoltà nel costruire la figura a cui si riferisce il problema?

d) Avete notato termini o espressioni che sono usati con significato diverso nel linguaggio quotidiano? Quali?

3. Se ritenete che esistano, indicate parole per le quali possano effettivamente verificarsi equivoci tra il significato quotidiano e quello adottato in matematica.

4. Considerate il seguente problema: "Antonio e Bruna vanno al Casinò a giocare. Prima di iniziare hanno rispettivamente A euro e B euro. Antonio vince 100 euro, mentre Bruna aumenta il suo denaro del 10%. Alla fine Bruna ha il doppio degli euro di Antonio. Scrivete un'equazione (con le lettere A, B definite sopra) che esprima quest'ultima relazione."
   Quali sono secondo voi i punti del problema che potrebbero mettere in difficoltà uno studente di scuola secondaria superiore?

5. A un gruppo di matricole di Informatica viene assegnato il seguente problema. "Scrivete un polinomio f di IV grado a coefficienti reali tale che: (1) f ha almeno una radice intera; (2) f ha almeno una radice razionale; (3) f ha almeno una radice reale; (4) f ha almeno una radice complessa non reale."
   Si sa che l'argomento 'polinomi' è stato svolto, incluso il teorema per cui se un numero complesso non reale è radice di un polinomio a coefficienti reali, allora anche il suo complesso coniugato è radice dello stesso polinomio. Oltre metà degli studenti risponde che un polinomio come quello richiesto non esiste, in quanto un polinomio di IV grado non può avere 5 radici distinte (1 intera, 1 razionale, 1 reale e 2 complesse coniugate). Secondo voi, quali delle affermazioni che seguono sono adeguate per spiegare il comportamento degli studenti?

   (i) Non sanno che $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$

   (ii) Hanno male interpretato la parola 'almeno'.

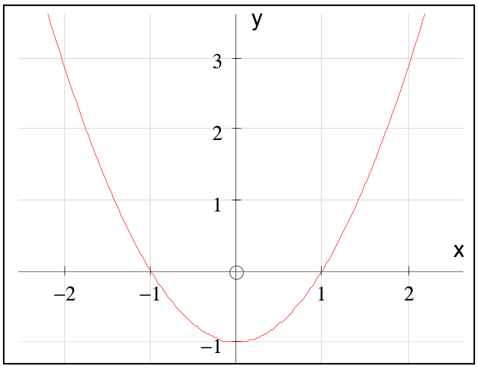
   (iii) Sono stati tratti in inganno dal modo in cui è formulato il problema.

   (iv) Hanno risposto a caso.

   (v) Non sono abituati a gestire più quesiti contemporaneamente.

   (vi) Altro (*specificare)*: ……………………………………..…

6. Considerate il diagramma seguente, che rappresenta un tratto del grafico di una funzione f derivabile su tutto $\mathbb{R}$. Commentate le affermazioni a destra, relative a f (vera, falsa, mancano informazioni per rispondere, …)



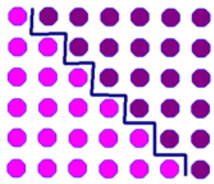
(i) $f(x) = x^2$
(ii) f è crescente in $(0, +\infty)$
(iii) $f(1)=0$
(iv) $f(3)=9$
(v) $f'(x)=0 \Rightarrow x=0$
(vi) $x=0 \Rightarrow f'(x)=0$
(vii) f è continua su tutto $\mathbb{R}$
(viii) $f(x)=0 \Rightarrow x=-1$ o $x=1$

Altri commenti?

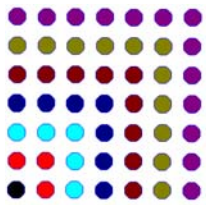
7. Si racconta che Gauss abbia scoperto da bambino che

$$1 + 2 + ... + n = n\,(n + 1)/2.$$

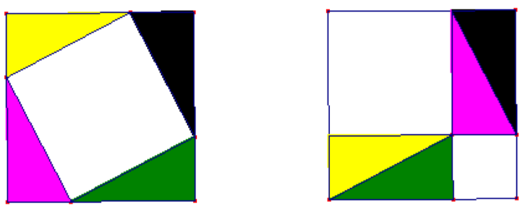
A vostro parere, la figura che segue può essere utile per far comprendere questa formula? Perché?



8. Quanto vale la somma dei primi n numeri dispari? Per rispondere, servitevi di questa figura:



9. Che cosa pensate di questa dimostrazione del teorema di Pitagora?



Appendice B

Attività proposte su

Non solo conoscenze

Alle radici delle difficoltà in matematica

Per ciascuno dei seguenti problemi determinate quali conoscenze o abilità è in grado di verificare, con una valutazione della loro difficoltà relativa e delle risposte che ritenete più probabili da parte di studenti alla fine della secondaria superiore. Se vi toccasse di progettare un breve test (2 problemi) per valutare la capacità di comprendere e usare le formule matematiche, quale coppia di problemi scegliereste fra i quattro proposti?

Problema 1

La frazione algebrica $\frac{a^2-2a+1}{a^2-1}$, per ogni $a \neq \pm 1$, è equivalente a:

A. $2a$-1

B. $\frac{1}{a+1}$

C. $\frac{a-1}{a+1}$

D. $2a$+1

E. Nessuna delle risposte precedenti è appropriata

Problema 2

Nel piano cartesiano, l'insieme dei punti verificanti la condizione $(x-5)(y+3)=0$ è:

A. Il punto $P = (5,0)$ e il punto $Q = (0,3)$

B. L'intersezione della retta $x = 5$ e della retta $y = -3$

C. L'unione della retta $x = 5$ e della retta $y = -3$

D. l'insieme dei punti della curva di equazione $y = \frac{15-3x}{x-5}$

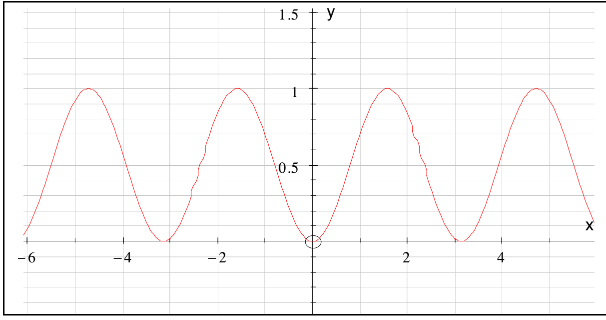
E. Nessuna delle risposte precedenti è appropriata

Problema 3

Scrivete le soluzioni reali dell'equazione $\sqrt{2-x} = x$ [domanda aperta]

Problema 4

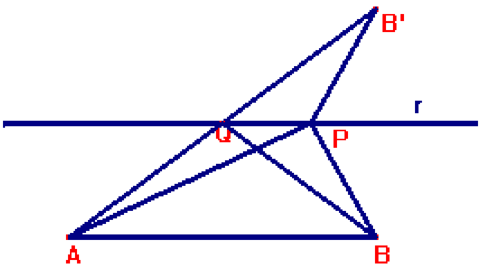
Considerate la funzione il cui grafico è riportato sotto.

	Quali delle equazioni riportate di seguito sicuramente non corrispondono al grafico? ▪ $y = \sin x$ ▪ $y = \left(\cos(x+\pi)\right)^2$ ▪ $y = (\sin x)^2$ ▪ $y = \sin\left(x^2\right)$ ▪ $y = 1 - \cos x$

Appendice C

Un problema di minimo

Considerate la dimostrazione che segue[15]. Riscrivetela in modo che risulti un testo comprensibile da uno studente del secondo o terzo anno di scuola superiore. Se ritenete di utilizzare un disegno, potete riferirvi a quello originario, oppure modificarlo oppure costruirne uno ex-novo.



"**Problema.** *Consideriamo l'insieme dei triangoli che hanno una certa base AB ed una certa altezza h. Quale tra essi ha perimetro minimo?*
I triangoli in questione hanno il terzo vertice *P* sulla retta r parallela ad *AB* e da essa distante *h*. Occorre scegliere *P* in modo che sia minima la somma | *AP* | + | *PB* |. Si consideri il punto *B'*, simmetrico di *B* rispetto ad *r*.
Allora | *AP* | + | *PB* | = | *AP* | + | *PB'* | e quest'ultimo è minimo quando il percorso *APB'* è rettilineo. Tracciata la retta *AB'* e intersecatala con *r* in *Q*, si applicano le proprietà della simmetria per trovare | *AQ* | = | *QB'* | = | *QB* | . Si conclude:

tra tutti i triangoli che hanno una certa base e una certa altezza il triangolo isoscele è quello che ha il perimetro minimo."

---

[15] Tratta da: B. Scimemi, *Riscoprendo la geometria del triangolo,* in *L'insegnamento della Geometria*, Seminario di formazione per Docenti, Lucca, 1995-96, Quaderno 19/2 del M. P. I.