Esame online (key: USpFXX) tramite la piattaforma Exam.net e durante Zoom meeting ID 979 9171 9874, password 3jV4mq di Algebra Lineare e Geometria per il Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica, UNICAL, Presidente: Dott.ssa Concettina Galati, Data: 16 settembre 2020.
E' vietato consultare libri o appunti, nonché l'uso di calcolatori scientifici. Scrivere le risposte direttamente su pc, nello spazio bianco a disposizione usando la tastiera. In particolare, scrivere Nome, Cognome e Matricola. Poi per ciascuna domanda scrivere la risposta esatta, in modo chiaro. È consigliato (ma non obbligatorio) creare, usando la barra degli strumenti in alto a destra, una tabella a due colonne e 10 righe. Nella prima colonna inserire il numero della domande e nella seconda la risposta corretta per ciascuna domanda. Ciascuna domanda vale 3 punti se corretta, 0 se sbagliata.

---

1. È data l'equazione
$$w^3 = \frac{-8}{2i\sqrt{2}}(i-1).$$
Quali dei seguenti numeri complessi è soluzione?
A) $w = \sqrt{2}e^{\frac{5\pi i}{12}}$;
B) $w = \sqrt{2\sqrt{2}}e^{\frac{5\pi i}{12}}$;
C) $(16)^{\frac{1}{6}}e^{\frac{5\pi i}{12}}$; (**risposta esatta**)
D) $(16)^{\frac{-1}{6}}e^{\frac{15\pi i}{4}}$.
(Vale 3 punti)

2. Sono dati i numeri complessi $z = -2(i-1)$ e $w = \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{6}}$. La forma esponenziale di zw è data da?
A) $zw = -2\sqrt{2}e^{\frac{11\pi i}{12}}$;
B) $wz = \sqrt{8}e^{\frac{11\pi i}{12}}$;
C) $zw = 4e^{\frac{23\pi i}{12}}$; (**risposta esatta**)
D) $zw = 2\sqrt{2}e^{\frac{11\pi i}{12}}$.
(Vale 3 punti)

3. Si dica per quali valori reali di λ l'applicazione lineare $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ é suriettiva:
A) $\lambda \neq 2$;
B) $\lambda = 0$;
C) $\lambda \neq -2$; (**risposta esatta**)
D) $\lambda \neq 0$.
(Vale 3 punti)

4. È data la matrice $B = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

A) La matrice B invertibile per ogni $t \in \mathbf{R}$ e $B^2 = \begin{pmatrix} t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

B) La matrice B invertibile per ogni $t \neq 0$ e $B^2 = \begin{pmatrix} 2t & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

C) La matrice B invertibile per ogni $t \neq 0$ e $B^2 = \begin{pmatrix} 2t & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

D) La matrice B invertibile per ogni $t \neq 0$ e $B^2 = \begin{pmatrix} t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (**risposta esatta**) (Vale 3 punti)

5. Sono dati 3 vettori $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$, $\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R^4}$. Il sottospazio

$$U =< \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3} >\subset \mathbf{R^4}$$

ha dimensione:

A) 3 per $t \neq 0$;
B) 3 per $t \neq 0, -1$; (**risposta esatta**)
C) 3 per ogni $t \in \mathbf{R}$;
D) 3 per $t \neq -1$.

(Vale 3 punti)

6. Sono dati in $\mathbf{R^3}$ il piano $\pi : x + 2y - z = 1$ e la retta $r : x - y = z = 0$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

A) I due sottospazi si intersecano nell'origine.

B) Il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene all'unione di r e π; (**risposta esatta**)

C) Il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene all'intersezione di r e π;

D) Il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ non appartiene a nessuno dei sue sottospazi.

(Vale 3 punti)

7. Per quali valori del parametro reale t il sistema lineare

$$\begin{cases} x - ty + tz = -2 \\ x - y + 2tz = 1 \end{cases}$$

è compatibile ed ammette un numero finito di soluzioni?

A) $t = 0$;
B) per ogni $t \in \mathbf{R}$;
C) $t \neq 0$;
D) nessuno. (**risposta esatta**)

(Vale 3 punti)

8. Sia data l'applicazione lineare $f : \mathbf{R^5} \to \mathbf{R^5}$ definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

A) f è non diagonalizzabile su $\mathbf{R}$ ma è diagonalizzabile su $\mathbf{C}$;
B) $\lambda = 1$ è un autovalore di f con molteplicità algebrica 1; (**risposta esatta**)
C) $\lambda = 1$ è un autovalore di f con molteplicità algebrica 4;
D) f non ha autovalori reali.

(Vale 3 punti)

9. Sia data l'applicazione lineare f dell'esercizio precedente e sia $(x_1, ..., x_5)$ un sistema di coordinate cartesiane su $\mathbf{R^5}$. Se $\Lambda \subset \mathbf{R^5}$ è il piano $\Lambda : x_1 = x_2 = x_3 = 0$, quali delle seguenti affermazioni sul sottospazio immagine $f(\Lambda)$ è vera:

A) $f(\Lambda) = \{\Lambda\}$; (**risposta esatta**)
B) $f(\Lambda) : x_1 = x_3 = x_4 = 0$;
C) $f(\Lambda) : x_1 = x_2 = x_3 = 0$; (**risposta esatta**)
D) $f(\Lambda)$ è una retta.

(Vale 3 punti. Il testo di questa domanda é stato corretto durante lo svolgimento del compito alla presenza di tutti gli studenti. Ci sono due risposte esatte, per errore. Entrambe verranno considerate corrette.)

10. Sia data l'applicazione lineare $g : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ definita da $g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Il nucleo di g:

A) ha dimensione 1 e contiene il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;
B) ha dimensione 2;
C) ha dimensione 1 e contiene il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; (**risposta esatta**)
D) ha dimensione 0.

(Vale 3 punti)